

U/NORD

Matematisk Bevissamling

Nicolai Kliem

31. januar 2025



Kolofon

Titel	Matematisk Bevissamling
Forfatter	Nicolai Karlsrose Kliem
Sprog	Dansk
Nøgleord	Matematik, Matematisk metode, Bevisførelse
URL	https://kliem.dk/Nics_Noter/index.html
Version	31. januar 2025
Sider	89
Kontaktinfo	Nicolai Karlsrose Kliem Hillerød Tekniske Gymnasium Carlsbergvej 34, 3400 Hillerød Email: nkl@unord.dk
Tak	Først og fremmest tak til min gode kollega Lars Mikkelsen, som viste mig induktionsbeviset for differentiation af x^n. Det var det, som fik mig i gang med bevissamlingen. Og også en stor tak til min elev Christian B., som fik mig i gang med L^AT_EX, som jeg ellers ikke havde brugt i 20 år. Og tak til alle kolleger og elever, som har påpeget fejl og mangler og på den måde gjort bevissamlingen bedre.
Copyright	Denne samling af beviser er lavet som en hjælp til danske gymnasieelever, og den er lavet til at blive brugt. Det vil glæde mig, hvis den deles med andre, så længe det sker til undervisning eller privat brug. Kommerciel udnyttelse er således ikke tilladt. Jeg vil bede om, at man ikke lægger kopier rundt omkring på andre hjemmesider, intranet eller lignende. Det er bedre at give elever og andre interesserede linket til min hjemmeside. Her vil altid ligge nyeste version af bevissamlingen. Bevissamlingen er beskyttet i medfør af gældende dansk lov om ophavsret. Det betyder f.eks. at kopiering til undervisningsbrug sker efter Copydan Tekst og Node aftaler.

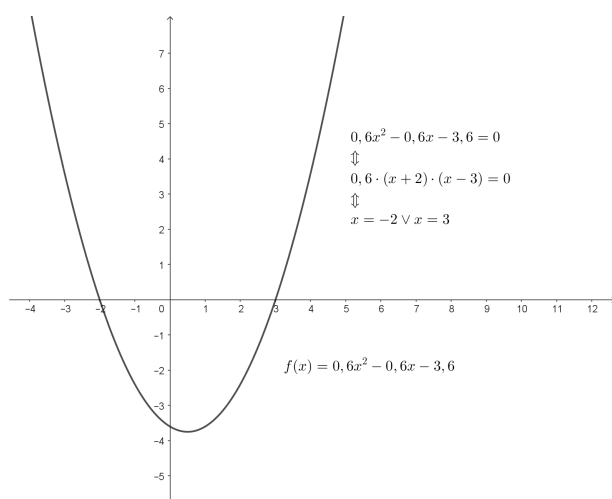
Indhold

1	Ligninger	4
1.1	Andengradsligningen	5
2	Trigonometri	7
2.1	Arealet af en vilkårlig trekant	8
2.1.1	Bevis for en spidsvinklet trekant	8
2.1.2	Bevis for en stumpvinklet trekant	9
2.2	Sinusrelationen	11
2.2.1	Bevis for en spidsvinklet trekant	11
2.2.2	Bevis for en stumpvinklet trekant	12
2.3	Cosinusrelationen	13
2.3.1	Bevis for en spidsvinklet trekant	13
2.3.2	Bevis for en stumpvinklet trekant	14
3	Geometri	16
3.1	Afstand fra punkt til linje	17
4	Funktioner	19
4.1	Parablens toppunkt	20
4.1.1	Bevis uden differentialregning	20
4.1.2	Bevis ved differentialregning	21
4.2	Afbildning i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem	22
4.3	Afbildning i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem	23
4.4	Fordoblingskonstant for en eksponentiel udvikling	24
4.5	Halveringskonstant for en eksponentiel udvikling	25
4.6	Eksponentialfunktionens grundtal	26
5	Differentialregning	27
5.1	Differentialkvotienten af den konstante funktion	28
5.2	Differentialkvotienten af ax	29
5.3	Differentialkvotienten af x^2	30
5.4	Differentialkvotient af x^n	31
5.4.1	Bevis ved brug induktion	31
5.4.2	Bevis ved brug af eksponential- og logaritme-funktioner	32
5.4.3	Bevis med 3-trinsreglen	32
5.5	Differentiation af en konstant gange en funktion	34
5.6	Differentiation af summen af to funktioner	35
5.7	Differentiation af produktet af to funktioner	36
5.8	Differentiation af en funktion divideret med en anden funktion	37
5.8.1	Bevis med 3-trinsreglen	37

5.8.2	Bevis ved brug af andre regneregler	38
5.9	Tangentens ligning	39
6	Integralregning	40
6.1	Arealet under en graf	41
6.2	Infinitesimalregningens fundamentalsætning	43
6.3	Kurvelængde	45
6.4	Volumen af omdrejningslegeme roteret om x-aksen	47
6.5	Overfladeareal af omdrejningslegeme roteret om x-aksen	48
6.6	Volumen af omdrejningslegeme roteret om y-aksen	50
7	Differentialligninger	52
7.1	$y' = a \cdot y$	53
7.2	$y' = a \cdot y + b$	54
7.2.1	Kort bevis ved benyttelse af substitution	54
7.2.2	Langt bevis ved benyttelse af separation af variable	54
7.3	Den maksimale hældning for logistisk vækst	56
7.3.1	Bevis ved benyttelse af parablens toppunkt	56
7.3.2	Bevis ved benyttelse af maksimering	56
8	Rumlige figurer	58
8.1	Volumen af en kugle	59
8.2	Overfladearealet af en kugle	61
8.3	Volumen af en kegle	63
8.4	Overfladearealet af en kegle	65
8.5	Volumen af en keglestub	67
9	Vektorer i planen	69
9.1	Længden af en vektor	70
9.2	Skalarproduktet	71
9.3	Vektorprojektion	73
9.4	Arealet af to vektorers udspændte parallelogram	75
10	Vektorer i rummet	77
10.1	Linjens parameterfremstilling	78
10.2	Planens ligning på normalform	80
11	Talfølger og rekursion	81
11.1	Den harmoniske række	82
11.2	Newtons metode	83
12	Vektorfunktioner	85
12.1	Længden af en banekurve	86
12.2	Vektorfunktionens overstrøgne areal	88

Kapitel 1

Ligninger



1.1 Andengradsligningen

Sætning

En andengradsligning af formen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hvor $a \neq 0$, og med en diskriminant givet ved $D = b^2 - 4ac$, kan have nul, en eller to løsninger afhængig af diskriminantens fortegn.

$D > 0$: Der er to løsninger $x = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$

$D = 0$: Der er én løsning $x = -\frac{b}{2a}$

$D < 0$: Der er ingen løsning.

Bevis

Vi har ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (1.1)$$

Trækker c fra på begge sider af lighedstegnet og dividerer med a

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a} \quad (1.2)$$

Vi ser, at venstresiden minder om to led i 1. kvadratsætning $(x + \frac{b}{2a})^2 = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$. Lægger derfor $\frac{b^2}{4a^2}$ til på begge sider af lighedstegnet

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad (1.3)$$

og benytter kvadratsætningen

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \quad (1.4)$$

Forlænger brøken i andet led på højresiden med $4a$, så de to brøker får fællesnævner

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{4ac}{4a^2} \quad (1.5)$$

Trækker de to brøker fra hinanden

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (1.6)$$

Vi indfører nu diskriminanten $D = b^2 - 4ac$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} \quad (1.7)$$

Det ses umiddelbart, at hvis $D < 0$ kan ligningen ikke løses, og der er dermed ingen løsning.

Hvis $D = 0$ har vi

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \quad (1.8)$$

og dermed fås

$$x + \frac{b}{2a} = 0 \quad (1.9)$$

og der er én løsning

$$x = -\frac{b}{2a} \quad (1.10)$$

Hvis $D > 0$ har vi to løsninger, fordi vi har et led i anden potens. Vi tager kvadratroden på begge sider af lighedstegnet

$$x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{D}{4a^2}} \vee x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{D}{4a^2}} \quad (1.11)$$

Isolerer x og benytter at kvadratroden af en brøk er kvadratroden af tælleren divideret med kvadratroden af nævneren dvs. $\sqrt{\frac{D}{4a^2}} = \frac{\sqrt{D}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\sqrt{D}}{2a}$ og bestemmer dermed de to løsninger

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{D}}{2a} \vee x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{D}}{2a} \quad (1.12)$$

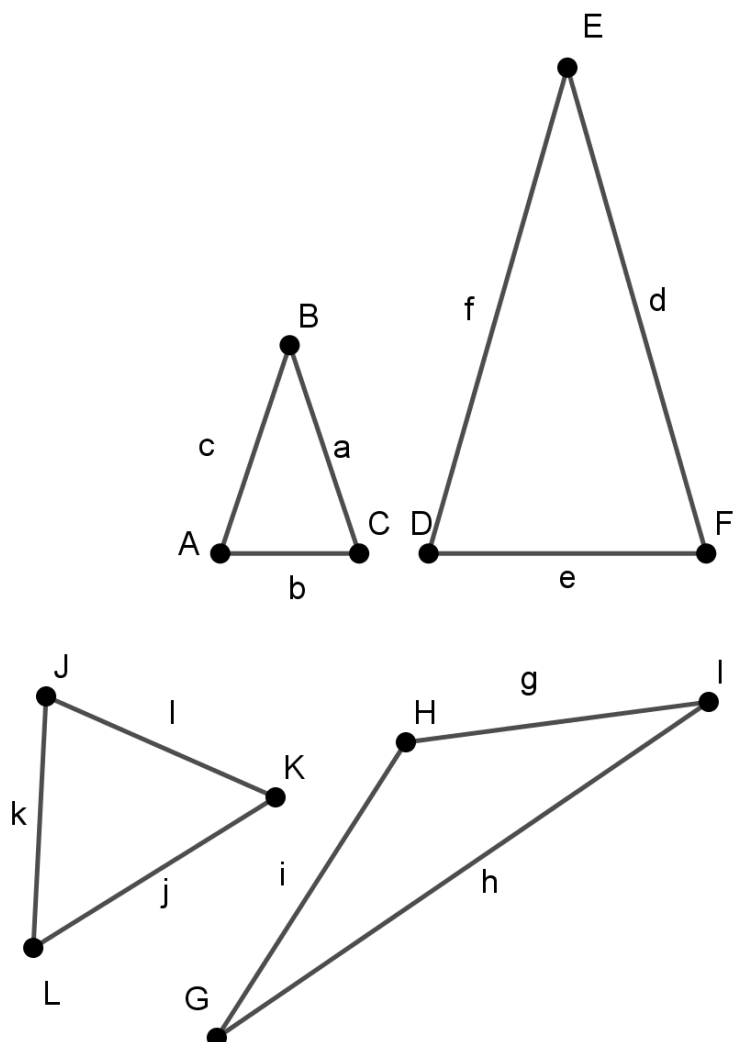
Sætter de to brøker på højresiderne sammen på en brøkstreg

$$x = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} \vee x = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \quad (1.13)$$

Q.E.D

Kapitel 2

Trigonometri



2.1 Arealet af en vilkårlig trekant

Sætning

Arealet T af en vilkårlig trekant beregnes som

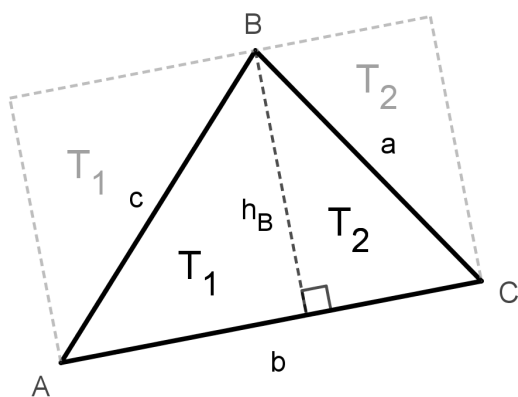
$$T = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin(C)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A)$$

$$T = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin(B)$$

2.1.1 Bevis for en spidsvinklet trekant

Vi har en vilkårlig trekant $\triangle ABC$



Figur 2.1: En vilkårlig trekant $\triangle ABC$ med højde h_B , som angiver højden fra punkt B vinkelret på linje b .

h_B angiver højden fra punkt B vinkelret på side b og deler trekanten i to vinkelrette trekanter, med arealer kaldet T_1 og T_2 . Vi konstruerer et rektangel med sider parallel med side b og højde h_B . Vi ser umiddelbart at trekantens areal er

$$T = T_1 + T_2 \quad (2.1)$$

Af symmetriårsager er rektanglet areal

$$T_{\text{rektangel}} = 2T_1 + 2T_2 \quad (2.2)$$

og trekanten har derfor det halve areal af rektanglet

$$T = 2T_{\text{rektangel}} \quad (2.3)$$

Arealet af et rektangel beregnes som højde gange længde

$$T_{\text{rektangel}} = h_B \cdot b \quad (2.4)$$

og trekantens areal må således være

$$T = \frac{1}{2} \cdot h_B \cdot b \quad (2.5)$$

svarende til en halv højde gange grundlinje.

Ud fra definitionen af sinus til en vinkel, som modstående katete divideret med hypotenusen, kan vi beskrive $\sin(A)$ som

$$\sin(A) = \frac{h_B}{c} \quad (2.6)$$

og når vi ganger igennem med c fås

$$h_B = c \cdot \sin(A) \quad (2.7)$$

Vi substituerer højden ind i 2.5 og får derved

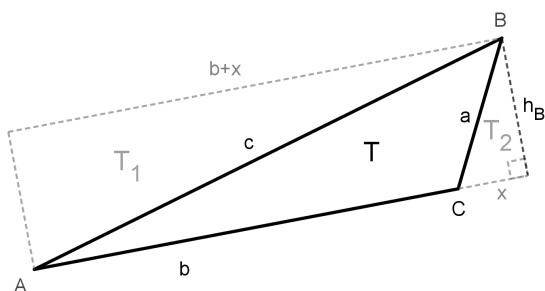
$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A) \quad (2.8)$$

På samme måde kan vi danne højder fra punkt B og C og dermed bevise de andre formler.

Q.E.D

2.1.2 Bevis for en stumpvinklet trekant

Vi har en vilkårlig stumpvinklet trekant $\triangle ABC$



Figur 2.2: En vilkårlig stumpvinklet trekant $\triangle ABC$ med højde h_B , som angiver højden fra punkt B vinkelret på linje b .

h_B angiver højden fra punkt B vinkelret på side b . Vi forlænger side b med stykket x og konstruerer et rektangel med sider parallel med side $b+x$ og højde h_B . Vi ser umiddelbart at rektanglets areal er Arealet af et rektangel beregnes som højde gange længde

$$T_{\text{rektangel}} = h_B \cdot (b + x) = h_B \cdot b + h_B \cdot x \quad (2.9)$$

Eftersom side c er diagonalen i rektangel, har vi at rektanglets areal er 2 gange med T_1

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot T_{\text{rektangel}} \quad (2.10)$$

Vi har en anden retvinklet trekant med areal T_2 givet som

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot h_B \cdot x \quad (2.11)$$

og vi ser, at trekantens areal er givet ved T_1 og T_2 som

$$T = T_1 - T_2 \quad (2.12)$$

Vi substituere 2.9, 2.10 og 2.11 ind i og får derved

$$T = \frac{1}{2} \cdot (h_B \cdot b + h_B \cdot x) - \frac{1}{2} \cdot h_B \cdot x \quad (2.13)$$

Ganger $\frac{1}{2}$ ind i parentesen

$$T = \frac{1}{2} \cdot h_B \cdot b + \frac{1}{2} \cdot h_B \cdot x - \frac{1}{2} \cdot h_B \cdot x \quad (2.14)$$

De to led med $\frac{1}{2} \cdot h_B \cdot x$ har forskellig fortegn og ud med hinanden og vi har derfor

$$T = \frac{1}{2} \cdot h_B \cdot b \quad (2.15)$$

svarende til en halv højde gange grundlinje.

Ligesom for den spidsvinklede trekant beskrives $\sin(A)$ ud fra definitionen af sinus til en vinkel, som modstående katete divideret med hypotenusen

$$\sin(A) = \frac{h_B}{c} \quad (2.16)$$

og når vi ganger igennem med c fås

$$h_B = c \cdot \sin(A) \quad (2.17)$$

Vi substituere højden ind i 2.5 og får derved

$$T = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin(A) \quad (2.18)$$

På samme måde kan vi danne højder fra punkt B og C og dermed bevise de andre formler.

Q.E.D

2.2 Sinusrelationen

Sætning

Forholdet mellem sinus til en vinkel og dens modstående side er konstant, og vi har

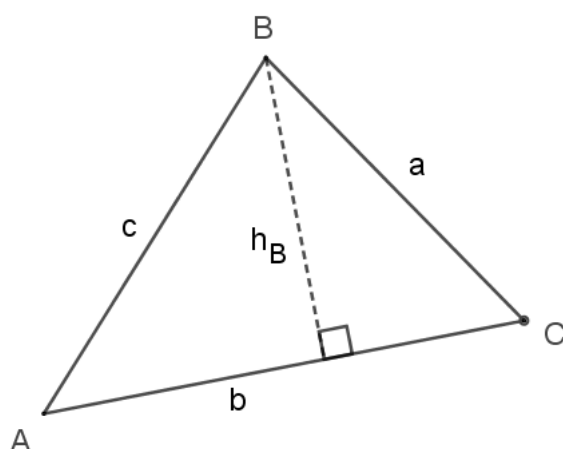
$$\frac{\sin(A)}{a} = \frac{\sin(B)}{b} = \frac{\sin(C)}{c}$$

og

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)}$$

2.2.1 Bevis for en spidsvinklet trekant

Vi har en vilkårlig trekant $\triangle ABC$.



Figur 2.3: En vilkårlig trekant $\triangle ABC$ med højde h_B angiver højden fra punkt B vinkelret på linje b .

h_B angiver højden fra punkt B vinkelret på linje b . Derved har vi to retvinklede trekanter, og vi kan bruge definitionen af sinus til en vinkel, som modstående katete divideret med hypotenusen til at beskrive $\sin(A)$ og $\sin(C)$

$$\sin(A) = \frac{h_B}{c} \quad \text{og} \quad \sin(C) = \frac{h_B}{a} \quad (2.19)$$

Isolerer h_B i de to udtryk ved at gange igennem med henholdsvis c og a

$$h_B = c \cdot \sin(A) \quad \text{og} \quad h_B = a \cdot \sin(C) \quad (2.20)$$

Eftersom h_B er lig med to forskellige udtryk, må de være lig med hinanden

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C) \quad (2.21)$$

Vi dividere igennem med $a \cdot c$ og får

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)} \quad (2.22)$$

På samme måde kan vi lave en højde fra punkt C vinkelret på side c og får derved

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \quad \text{og} \quad \frac{a}{\sin(A)} = \frac{b}{\sin(B)} \quad (2.23)$$

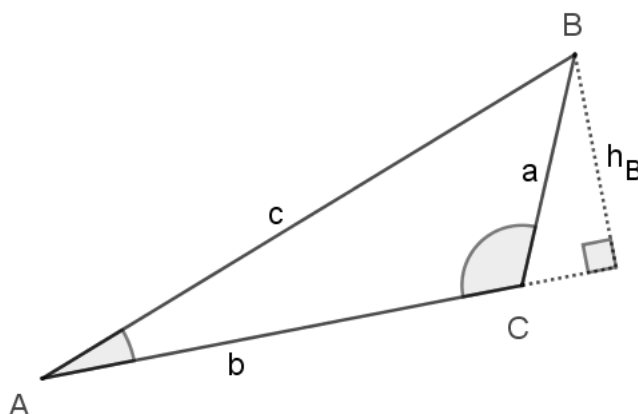
og med en højde fra punkt A vinkelret på side a fås

$$\frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} \quad \text{og} \quad \frac{b}{\sin(B)} = \frac{c}{\sin(C)} \quad (2.24)$$

Q.E.D

2.2.2 Bevis for en stumpvinklet trekant

Vi har en vilkårlig stumpvinklet trekant $\triangle ABC$



Figur 2.4: En vilkårlig trekant $\triangle ABC$ med højde h_B angiver højden fra punkt B vinkelret på linje b .

h_B angiver højden fra punkt B vinkelret på linje b . Fordi vinkel C er stump, dvs. større end 180° , forlænges side b . Derved har vi to retvinklede trekanter, hvor den ene trekant har en vinkel, der er $180^\circ - C$ og vi kan bruge definitionen af sinus til en vinkel, som modstående katete divideret med hypotenusen til at beskrive $\sin(A)$ og $\sin(180^\circ - C)$

$$\sin(A) = \frac{h_B}{c} \quad \text{og} \quad \sin(180^\circ - C) = \frac{h_B}{a} \quad (2.25)$$

Ud fra definitionen af sinus vha. af enhedscirklen ses, at $\sin(180^\circ - C) = \sin(C)$ og vi har således

$$\sin(A) = \frac{h_B}{c} \quad \text{og} \quad \sin(C) = \frac{h_B}{a} \quad (2.26)$$

Herefter følger beviset samme som ovenfor dvs. isolerer h_B i de to udtryk ved at gange igennem med henholdsvis c og a

$$h_B = c \cdot \sin(A) \quad \text{og} \quad h_B = a \cdot \sin(C) \quad (2.27)$$

Eftersom h_B er lig med to forskellige udtryk, må de være lig med hinanden

$$c \cdot \sin(A) = a \cdot \sin(C) \quad (2.28)$$

Vi dividerer igennem med $a \cdot c$ og får

$$\frac{a}{\sin(A)} = \frac{c}{\sin(C)} \quad (2.29)$$

Q.E.D

2.3 Cosinusrelationen

Sætning

For en vilkårlig trekant gælder følgende relation mellem sidelængder og cosinus til en vinkel

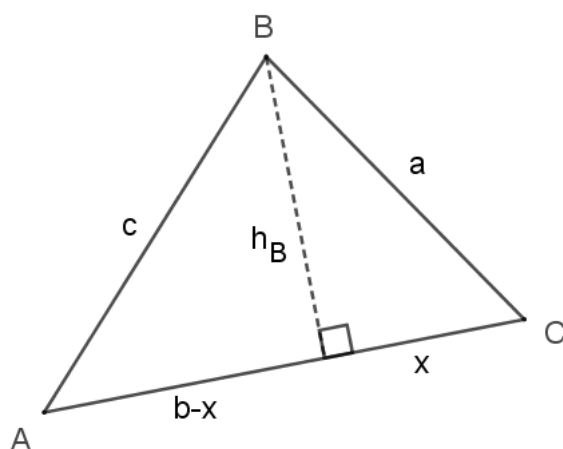
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(B)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A)$$

2.3.1 Bevis for en spidsvinklet trekant

Vi har en vilkårlig trekant $\triangle ABC$



Figur 2.5: En vilkårlig trekant $\triangle ABC$ med højde h_B angiver højden fra punkt B vinkelret på linje b .

h_B angiver højden fra punkt B vinkelret på side b . Den del af siden b , der går mellem punkt C og foden af højden har en længde, vi her betegner x , den anden del af side b , må således have længde $b - x$. Vi har to retvinklede trekanter, og vi kan anvende Pythagoras sætning

$$c^2 = (b - x)^2 + h_B^2 \quad \text{og} \quad a^2 = x^2 + h_B^2 \quad (2.30)$$

Vi isolerer h_B^2 i begge ligninger

$$h_B^2 = c^2 - (b - x)^2 \quad \text{og} \quad h_B^2 = a^2 - x^2 \quad (2.31)$$

Eftersom h_B^2 er lig to forskellige udtryk må disse også være lig med hinanden

$$c^2 - (b - x)^2 = a^2 - x^2 \quad (2.32)$$

Lægges $(b - x)^2$ til på begge sider af lighedstegnet

$$c^2 = a^2 - x^2 + (b - x)^2 \quad (2.33)$$

Benytter anden kvadratsætning for at hæve parenteser

$$c^2 = a^2 - x^2 + b^2 + x^2 - 2bx \quad (2.34)$$

Bemærker at de to led med x^2 går ud med hinanden

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bx \quad (2.35)$$

Vi kan bruge definitionen af cosinus til en vinkel, som hosliggende katete divideret med hypotenusen til at beskrive $\cos(C)$

$$\cos(C) = \frac{x}{a} \quad (2.36)$$

og vi har således

$$x = a \cdot \cos(C) \quad (2.37)$$

Vi substituere x og har nu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C) \quad (2.38)$$

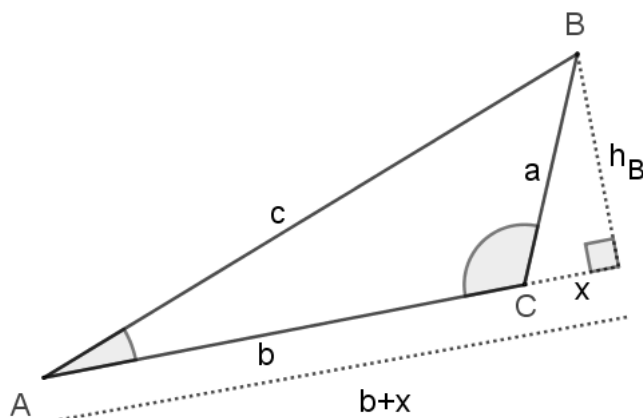
På samme måde kan vi lave højder fra punkt A og C får derved

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2 \cdot c \cdot a \cdot \cos(B) \quad \text{og} \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(A) \quad (2.39)$$

Q.E.D

2.3.2 Bevis for en stumpvinklet trekant

For en stumpvinklet trekant, kan vi forlænge side b med stykket x , og på den måde få to retvinklede trekanter.



Figur 2.6: En vilkårlig trekant $\triangle ABC$ med højde h_B angiver højden fra punkt B vinkelret på linje b .

Tilsvarende den spidsvinklede får vi nu to retvinklede trekanter, og vi benytter Pythagoras sætning for sidenlængderne

$$c^2 = (b+x)^2 + h_B^2 \quad \text{og} \quad a^2 = x^2 + h_B^2 \quad (2.40)$$

Vi isolerer h_B^2 i begge ligninger

$$h_B^2 = c^2 - (b+x)^2 \quad \text{og} \quad h_B^2 = a^2 - x^2 \quad (2.41)$$

Eftersom h_B^2 er lig to forskellige udtryk må disse også være lig med hinanden

$$c^2 - (b+x)^2 = a^2 - x^2 \quad (2.42)$$

Lægges $(b+x)^2$ til på begge sider af lighedtegnet

$$c^2 = a^2 - x^2 + (b+x)^2 \quad (2.43)$$

Benytter første kvadratsætning for at hæve parentesen

$$c^2 = a^2 - x^2 + b^2 + x^2 + 2bx \quad (2.44)$$

Bemærker at de to led med x^2 går ud med hinanden

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2bx \quad (2.45)$$

Vi kan bruge definitionen af cosinus til en vinkel, som hosliggende katete divideret med hypotenusen til at beskrive $\cos(180^\circ - C)$

$$\cos(180^\circ - C) = \frac{x}{a} \quad (2.46)$$

og vi har således

$$x = a \cdot \cos(180^\circ - C) \quad (2.47)$$

Ved definitionen af cosinus ud fra enhedscirklen har vi $\cos(180^\circ - C) = -\cos(C)$

$$x = -a \cdot \cos(C) \quad (2.48)$$

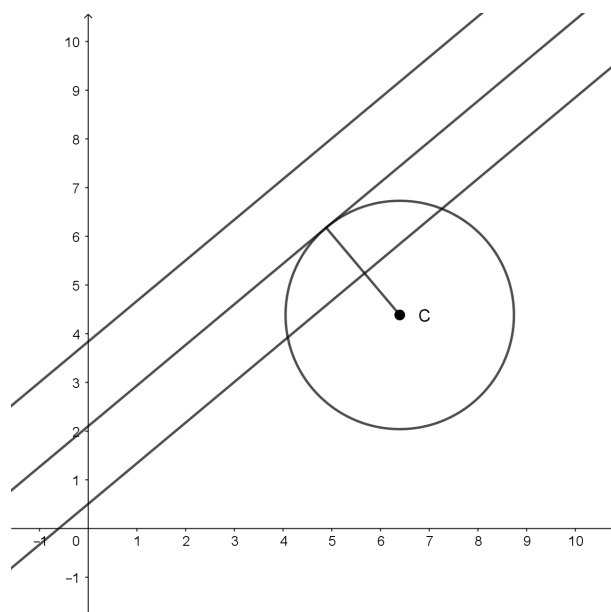
Vi substituere x og har nu

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(C) \quad (2.49)$$

Q.E.D

Kapitel 3

Geometri



3.1 Afstand fra punkt til linje

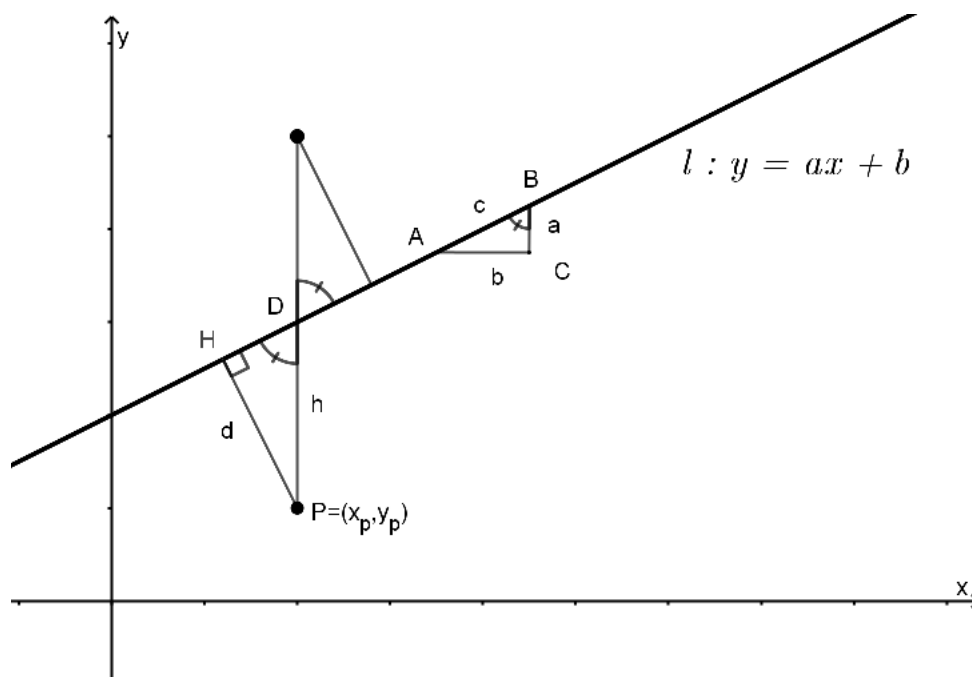
Sætning

Afstanden fra et punkt P med koordinaterne (x_P, y_P) til en linje med forskriften $y = a \cdot x + b$ beregnes som

$$d = \frac{|a \cdot x_P + b - y_P|}{\sqrt{1 + a^2}}$$

Bevis

Vi har en linje $l : y = a \cdot x + b$ og et punkt $P = (x_P, y_P)$.



Figur 3.1: Afstand fra punkt P til linje l .

Vi definerer to punkter på linjen: punkt H ligger vinkelret fra P , og punkt D ligger på linjen og har x -koordinat $x_D = x_P$, og y -koordinat $y_D = a \cdot x_P + b$.

Sidelængde d er den vinkelrette afstand fra P til linjen.

Sidelængde h er afstanden mellem P og D , og er givet ved $h = y_D - y_P = a \cdot x_P + b - y_P$.

Hvis P ligger oven over linjen har vi $h = y_P - y_D = -(y_D - y_P)$, men eftersom en sidelængde altid skal være positiv længde, kan vi definere h til at være den numeriske værdi, dvs.

$$h = |a \cdot x_P + b - y_P| \quad (3.1)$$

og så gælder formelen uanset hvilken side af linjen, at P ligger.

Vi laver nu en retvinklet trekant ABC med sidelængde $b = 1$ og hvor sidelængde a er givet ved hældningskoefficienten af linje l . Hypotenusen c beregnes vha. af Pythagoras sætning til

$$c = \sqrt{1 + a^2} \quad (3.2)$$

Vi ser fra figuren at vinklerne D og B er lige store, og eftersom H og C begge er vinkelrette, må vinkel P og A være lige store, og de to trekanter PHD og ABC er ensvinklede. Derfor gælder, at forholdet mellem sidelængderne er det samme, dvs.

$$\frac{d}{h} = \frac{b}{c} \implies d = \frac{h \cdot b}{c} \quad (3.3)$$

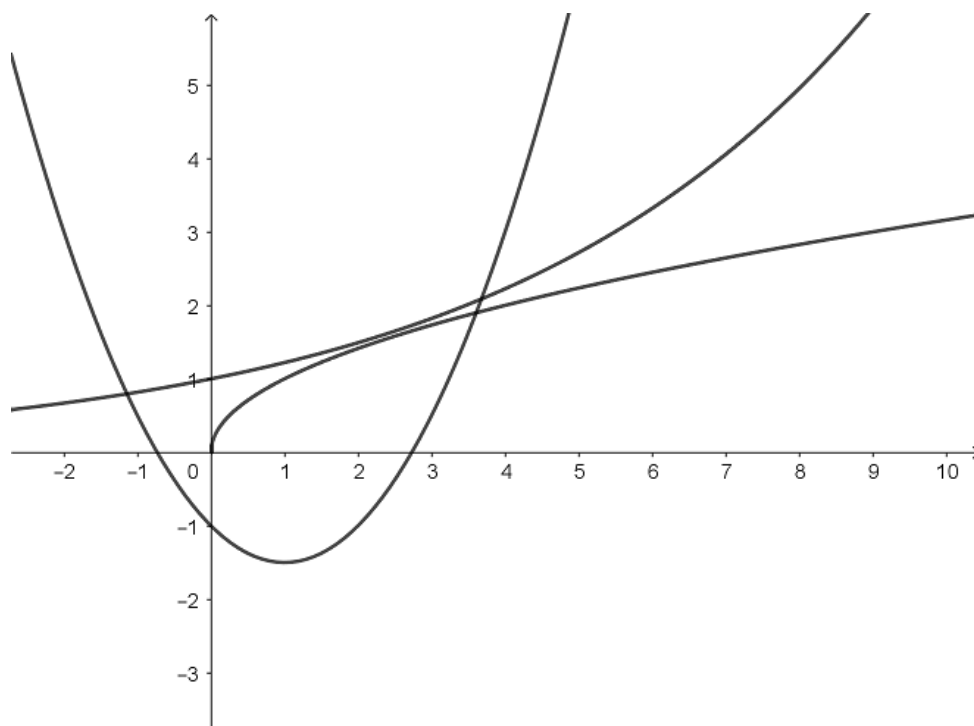
Vi indsætter nu udtrykkene for h , b og c og får

$$d = \frac{|a \cdot x_P + b - y_P|}{\sqrt{1 + a^2}} \quad (3.4)$$

Q.E.D

Kapitel 4

Funktioner



4.1 Parablens toppunkt

Sætning

Et andengradspolynomium, $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ har et toppunkt med koordinaterne

$$(x_t, y_t) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{D}{4a} \right)$$

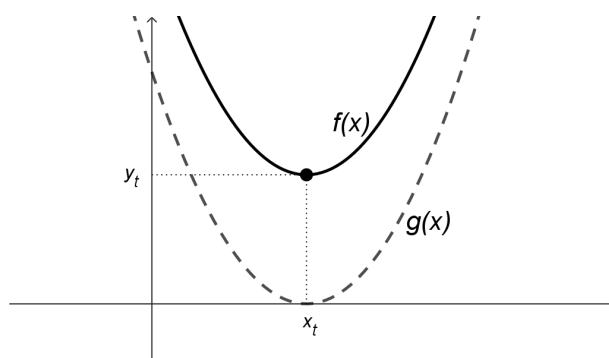
4.1.1 Bevis uden differentialregning

Vi har en funktion givet ved andengradspolynomiet

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad (4.1)$$

Vi kan konstruere en ny funktion $g(x)$ ved at trække en konstant værdi fra $f(x)$, og derved er grafen for $g(x)$ blot en lodret flytning af grafen for $f(x)$. Som det ses af figur 4.1 vil toppunktet for $g(x)$ ligge på x-aksen, hvis vi netop trækker y-koordinaten for toppunktet til $f(x)$ fra

$$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c - y_t \quad (4.2)$$



Figur 4.1: Grafer for to andengradspolynomier, hvor $g(x)$ er forskudt lodret med værdien y_t i forhold til $f(x)$.

Dette svarer samtidig til at $g(x)$ kun skærer x-aksen i et punkt, og fra 1.1 har vi derfor at x-koordinaten for skæringspunktet, som samtidig er x-koordinaten for toppunktet til både $f(x)$ og $g(x)$ er uafhængig af den lodrette flytning og er givet ved

$$x_t = -\frac{b}{2a} \quad (4.3)$$

Når $g(x)$ har netop ét skæringspunkt med x-aksen, er diskriminanten for $g(x)$ lig med nul

$$D_g = b^2 - 4a(c - y_t) = 0 \quad (4.4)$$

Vi lægger andet led $4a(c - y_t)$ til på begge sider af lighedstegnet

$$b^2 = 4a(c - y_t) \quad (4.5)$$

Dividere med $4a$

$$\frac{b^2}{4a} = c - y_t \quad (4.6)$$

Lægger y_t til og trækker $\frac{b^2}{4a}$ fra på begge sider og har nu

$$y_t = -\frac{b^2}{4a} - c \quad (4.7)$$

Forlænger andet led dvs. c med $4a$ og sætter på samme brøkstreg

$$y_t = \frac{-b^2 - 4ac}{4a} \quad (4.8)$$

Sætter minus uden for brøken Tælleren svarer til diskriminanten $D = b^2 - 4ac$ for $f(x)$, og vi kan skrive det som

$$y_t = -\frac{D}{4a} \quad (4.9)$$

Q.E.D

4.1.2 Bevis ved differentialregning

Vi har en funktion givet ved andengradspolynomiet

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad (4.10)$$

Toppunktets x-koordinat bestemmes ved at løse ligningen $f'(x_t) = 0$ og toppunktet y-koordinat bestemmes ved efterfølgende at beregne $y_t = f(x_t)$

Differentiere funktionen

$$f'(x) = 2a \cdot x + b \quad (4.11)$$

indsætter x_t

$$f'(x_t) = 2a \cdot x_t + b = 0 \quad (4.12)$$

Trækker b fra på begge sider af lighedstegnet og dividerer igennem med $2a$ og får derved

$$x_t = -\frac{b}{2a} \quad (4.13)$$

Bestemmer y-koordinaten

$$y_t = a \cdot x_t^2 + b \cdot x_t + c \quad (4.14)$$

Indsætter udtrykket for x_t

$$y_t = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c \quad (4.15)$$

I første led på højresiden ganges parentesen ud

$$y_t = a \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c \quad (4.16)$$

I første led forkortes med a , andet led forlænges med 2, og tredje led forlænges med $4a$, så vi får fællesnævner

$$y_t = \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \quad (4.17)$$

Sætter på samme brøkstreg

$$y_t = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \quad (4.18)$$

Ganger minustegnet ud foran brøken

$$y_t = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a} \quad (4.19)$$

Q.E.D

4.2 Afbildning i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem

Sætning

En eksponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ afbildes som en ret linje i et enkeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bevis

Vi har en eksponentialfunktion med grundtal a og skæring med y-aksen b

$$f(x) = b \cdot a^x \quad (4.20)$$

Vi tager logaritmen på begge sider

$$\ln(y) = \ln(b \cdot a^x) \quad (4.21)$$

Benytter logaritmeregnereglen $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$$\ln(y) = \ln(b) + \ln(a^x) \quad (4.22)$$

Benytter logaritmereglen $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$

$$\ln(y) = \ln(b) + x \cdot \ln(a) \quad (4.23)$$

Vi indfører nu en ny variabel $Y = \ln(y)$, samt parametrene $A = \ln(a)$ og $B = \ln(b)$, og får demed efter at have flyttet rundt på leddene

$$Y = A \cdot x + B \quad (4.24)$$

Vi har dermed at funktionen afbildes som en ret linje i et koordinatsystem med en logaritmisk y-akse og en almindelig x-akse.

Q.E.D

4.3 Afbildning i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem

Sætning

En potensfunktion $f(x) = b \cdot x^a$ afbildes som en ret linje i et dobbeltlogaritmisk koordinatsystem.

Bevis

Vi har en potensfunktion med eksponent a

$$f(x) = b \cdot x^a \quad (4.25)$$

Vi tager logaritmen på begge sider

$$\ln(y) = \ln(b \cdot x^a) \quad (4.26)$$

Benytter logaritmeregnereglen $\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$

$$\ln(y) = \ln(b) + \ln(x^a) \quad (4.27)$$

Benytter logaritmereglen $\ln(x^a) = a \cdot \ln(x)$

$$\ln(y) = \ln(b) + a \cdot \ln(x) \quad (4.28)$$

Vi indfører nu to nye variabler $X = \ln(x)$ og $Y = \ln(y)$, parameteren $B = \ln(b)$, og får dermed efter at have flyttet rundt på leddene

$$Y = a \cdot X + B \quad (4.29)$$

Vi har dermed at funktionen afbildes som en ret linje i et koordinatsystem, hvor både x- og y-aksen er logaritmiske.

Q.E.D

4.4 Fordoblingskonstant for en eksponentiel udvikling

Sætning

En eksponentielt voksende funktion, $f(x) = b \cdot a^x$ hvor med grundtal $a > 0$ har en fordoblingskonstant som er givet ved

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Bevis

Vi har en eksponentialfunktion

$$f(x) = b \cdot a^x \quad (4.30)$$

Når x er vokset med størrelsen T_2 er funktionsværdien blevet fordoblet

$$f(x + T_2) = 2 \cdot f(x) \quad (4.31)$$

Indsætter funktionsforskriften

$$b \cdot a^{x+T_2} = 2 \cdot b \cdot a^x \quad (4.32)$$

Dividere med b på begge sider af lighedstegnet

$$a^{x+T_2} = 2 \cdot a^x \quad (4.33)$$

Benytter potensregnereglen $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ på venstresiden af lighedstegnet

$$a^x \cdot a^{T_2} = 2 \cdot a^x \quad (4.34)$$

Forkorter med a^x (det må vi godt, fordi $a^x > 0$)

$$a^{T_2} = 2 \quad (4.35)$$

Tager logaritmen på begge sider af lighedstegnet og bruger logaritmeregnereglen $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$

$$T_2 \cdot \ln(a) = \ln(2) \quad (4.36)$$

Dividere med $\ln(a)$ på begge sider af lighedstegnet (det må vi godt, fordi $a > 1$ og dermed er $\ln(a) > 0$)

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)} \quad (4.37)$$

Q.E.D

4.5 Halveringskonstant for en eksponentiel udvikling

Sætning

En eksponentielt aftagende funktion, $f(x) = b \cdot a^x$ med grundtal $0 < a < 1$ har en halveringskonstant som er givet ved

$$T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}$$

$$T_{1/2} = -\frac{\ln(2)}{\ln(a)}$$

Bevis

Vi har en eksponentialfunktion

$$f(x) = b \cdot a^x \quad (4.38)$$

Når x er vokset med størrelsen $T_{1/2}$ er funktionsværdien blevet halveret

$$f(x + T_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot f(x) \quad (4.39)$$

Indsætter funktionsforskriften

$$b \cdot a^{x+T_{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot a^x \quad (4.40)$$

Dividere med b på begge sider af lighedstegnet

$$a^{x+T_{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot a^x \quad (4.41)$$

Benytter potensregnereglen $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$ på venstresiden af lighedstegnet

$$a^x \cdot a^{T_{1/2}} = \frac{1}{2} \cdot a^x \quad (4.42)$$

Forkorter med a^x (det må vi godt, fordi $a^x > 0$)

$$a^{T_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad (4.43)$$

Tager logaritmen på begge sider af lighedstegnet og bruger logaritmeregnereglen $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$

$$T_{1/2} \cdot \ln(a) = \ln(\frac{1}{2}) \quad (4.44)$$

Dividere med $\ln(a)$ på begge sider af lighedstegnet (det må vi godt, fordi $a \neq 1$ og dermed er $\ln(a) \neq 0$)

$$T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)} \quad (4.45)$$

Eftersom $\frac{1}{2} = 2^{-1}$ har vi $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$

$$T_{1/2} = -\frac{\ln(2)}{\ln(a)} \quad (4.46)$$

Q.E.D

4.6 Eksponentialfunktionens grundtal

Sætning

En eksponentialfunktion kan skrives med grundtal a som $f(x) = b \cdot a^x$ eller med den Eulers tal som $f(x) = b \cdot e^{k \cdot x}$, hvor

$$a = e^k \quad \text{eller} \quad k = \ln(a)$$

Hvis $a > 1$ eller $k > 0$ kan fordoblingskonstanten bestemmes som

$$T_2 = \frac{2}{\ln(a)} = \frac{2}{k}$$

Hvis $0 < a < 1$ eller $k < 0$ kan halveringskonstanten bestemmes som ^a

$$T_{1/2} = -\frac{2}{\ln(a)} = -\frac{2}{k}$$

^aDet bemærkes i øvrigt, at fordi $0 < a < 1$ og $k < 0$ har vi at halveringskonstanten bliver en positiv værdi på trods af det minustegn, der indgår i udtrykket.

Bevis

Vi har en eksponentialfunktion, som kan skrives på to måder

$$f(x) = b \cdot a^x \quad \text{og} \quad f(x) = b \cdot e^{k \cdot x} \quad (4.47)$$

og vi har derfor

$$b \cdot a^x = b \cdot e^{k \cdot x} \quad (4.48)$$

Forkorter med b

$$a^x = e^{k \cdot x} \quad (4.49)$$

Tager logritmen på begge sider

$$\ln(a^x) = \ln(e^{k \cdot x}) \quad (4.50)$$

Udnytter logaritmeregnereglen $\ln(a^x) = x \cdot \ln(a)$, samt at eksponentialfunktionen og logaritmen er omvendte funktioner dvs. $\ln(e^x)$

$$x \cdot \ln(a) = k \cdot x \quad (4.51)$$

Forkorter med x

$$\ln(a) = k \quad (4.52)$$

Tager eksponentialfunktionen på begge sider og udnytter at eksponentialfunktionen og logaritmen er omvendte funktioner

$$a = \ln(k) \quad (4.53)$$

Hvis $a > 1$ har vi således at $k > 0$. Fordoblingskonstanten bestemmes som $T_2 = \frac{2}{\ln(a)}$ og dermed

$$T_2 = \frac{2}{k} \quad (4.54)$$

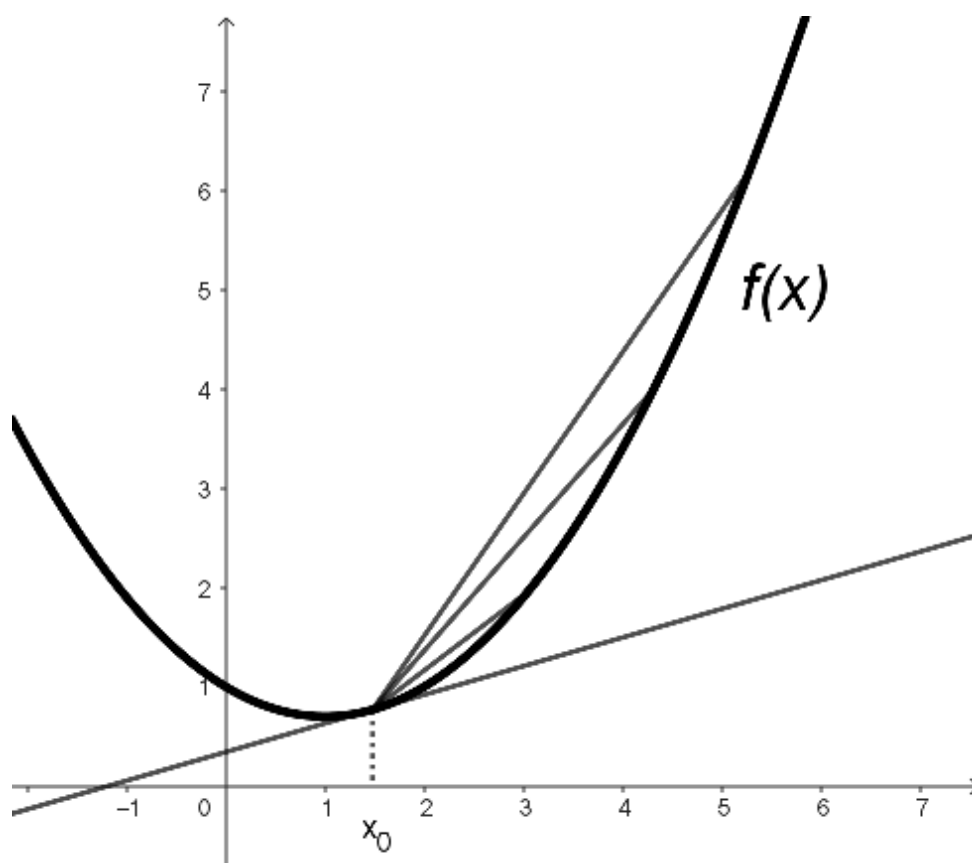
Hvis $0 < a < 1$ har vi $k < 0$. Halveringskonstanten bestemmes som $T_{1/2} = -\frac{2}{\ln(a)}$ og dermed

$$T_{1/2} = -\frac{2}{k} \quad (4.55)$$

Q.E.D

Kapitel 5

Differentialregning



5.1 Differentialkvotienten af den konstante funktion

Sætning

Differentialkvotienten af den konstante funktion $f(x) = k$ er

$$f'(x) = 0$$

Bevis

Vi benytter 3-trins reglen. Dette bevis er sådan set temmelig trivielt, den konstante funktion har hældning nul, men nu kører vi det formelt igennem

1. Bestem funktionstilvæksten

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k - k = 0 \quad (5.1)$$

2. Bestem differenskvotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0 \quad (5.2)$$

3. Bestem differentialkvotienten

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0 \quad (5.3)$$

Q.E.D

5.2 Differentialkvotienten af ax

Sætning

Differentialkvotienten af den lineære funktion $f(x) = a \cdot x$ er

$$f'(x) = a$$

Bevis

Vi benytter 3-trins reglen.

1. Bestem funktionstilvæksten

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = a \cdot (x_0 + \Delta x) - a \cdot x_0 = a \cdot x_0 + a \cdot \Delta x - a \cdot x_0 = a \cdot \Delta x \quad (5.4)$$

2. Bestem differenskvotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a \cdot \Delta x}{\Delta x} = a \quad (5.5)$$

3. Bestem differentialkvotienten

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a = a \quad (5.6)$$

Q.E.D

5.3 Differentialkvotienten af x^2

Sætning

Differentialkvotienten af funktionen $f(x) = x^2$ er

$$f'(x) = 2 \cdot x$$

Bevis

Vi benytter 3-trins reglen.

1. Bestem funktionstilvæksten Funktionstilvæksten er forskellen af funktionsværdier mellem de to punkter, bestemt ved $x_0 + \Delta x$ og x_0

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (5.7)$$

Da $f(x) = x^2$ kan vi skrive dette som

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 \quad (5.8)$$

Vi benytter første kvadratsætning $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

$$\Delta y = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 \quad (5.9)$$

Første og sidste led med x_0^2 går ud med hinanden, og vi har

$$\Delta y = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 \quad (5.10)$$

2. Bestem differenskvotienten Differenskvotienten er funktionstilvæksten divideret med Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} \quad (5.11)$$

Nævneren divideres op i hvert led i tælleren

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x \quad (5.12)$$

3. Bestem differentialkvotienten Differentialkvotienten defineres som grænseværdien af differensværdien for $\Delta x \rightarrow 0$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (5.13)$$

Substituere differenskvotienten fra 5.12

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0 \quad (5.14)$$

Andet går mod nul, og vi har

$$y' = \frac{dy}{dx} = 2x_0 \quad (5.15)$$

Da dette gælder for alle værdier af x_0 har vi hermed vist at

$$f'(x) = 2 \cdot x \quad (5.16)$$

Q.E.D

5.4 Differentialkvotient af x^n

Sætning

Differentialkvotienten af en potensfunktion x^n er givet ved

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

5.4.1 Bevis ved brug induktion

Dette er et såkaldt induktionsbevis, som går ud på, at man viser, at en sætning gælder for $n = 1$. Derefter viser man, at hvis den gælder for n , så gælder den også for $n + 1$, og på den måde har man vist, at den gælder for $n = 2, 3, 4, \dots$, altså for alle n . Det betyder, at vi her blot beviser sætningen for $n \in \mathbb{N}$.

n=1

Vi skal først vise at $(x^n)' = n \cdot x^{n-1} = 1$ gælder for $n = 1$. Det er gjort ved hjælp af 3-trinsreglen i kap. 5.2, hvis man der sætter $a = 1$. Det ses i øvrigt også umiddelbart at en funktion $f(x) = 1$ er en ret linje med hældning 1, dvs. at $f'(x) = 1$.

n+1

Vi skal differentiere x^{n+1} , og benytter først potensregnereglen $a^{n+m} = a^n \cdot a^m$

$$x^{n+1} = x^n \cdot x \quad (5.17)$$

og vi får derved at

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' \quad (5.18)$$

Vi benytter differentiation af et produkt af to funktioner (bevises i 5.7). Produktreglen siger, at den afledte af to funktioner ganget sammen kan findes som $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$. Dermed fås

$$(x^{n+1})' = (x^n)' \cdot x + x^n \cdot x' \quad (5.19)$$

Eftersom vi har antaget at reglen gælder for x^n , dvs. $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ har vi

$$(x^{n+1})' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \cdot x' \quad (5.20)$$

Ovenfor har vi allerede bevist at $x' = 1$, så andet led kan reduceres

$$(x^{n+1})' = nx^{n-1} \cdot x + x^n \quad (5.21)$$

Vi benytter potensregnereglen på første led, hvorved $x^{n-1} \cdot x = x^n$ og får

$$(x^{n+1})' = nx^n + x^n \quad (5.22)$$

Sætter x^n udenfor parentes

$$(x^{n+1})' = (n+1) \cdot x^n \quad (5.23)$$

Vi har nu vist, at når reglen gælder for x^n , så gælder den også for x^{n+1} . Når nu reglen gælder for $n = 1$, gælder den dermed også for $n = 2$, og dermed for $n = 3$ osv., og dermed gælder reglen for alle $n = 1, 2, 3, \dots$

Q.E.D

5.4.2 Bevis ved brug af eksponential- og logaritme-funktioner

Hvis n ikke er et reelt tal kan vi ikke bruge et induktionsbevis. I stedet benytter vi os af at eksponential- og logaritme-funktioner er hinandens omvendte funktioner. Vi kan derfor omskrive

$$x^n = e^{\ln(x^n)} \quad (5.24)$$

Vi benytter logaritme regnereglen $\ln(x^n) = n \cdot \ln(x)$ og får

$$x^n = e^{n \cdot \ln(x)} \quad (5.25)$$

Eftersom definitionsområdet for en logaritmefunktion er alle positive reelle tal gælder dette bevis for $x \in \mathbb{R}_+$.

Ovenstående er en sammensat funktion og vi benytter kæderegele til at differentiere funktionen. Den ydre funktion er den naturlige eksponentialfunktion, som differentieret giver sig selv. Den indre funktion differentieret er en konstant n ganget med differentialkoefficienten af naturlige logaritme, som giver $\frac{1}{x}$.

$$(x^n)' = (e^{n \cdot \ln(x)})' = e^{n \cdot \ln(x)} \cdot n \cdot \frac{1}{x} \quad (5.26)$$

Eftersom $e^{\ln(x^n)=x^n}$ har vi

$$(x^n)' = x^n \cdot n \cdot \frac{1}{x} = x^n \cdot n \cdot x^{-1} \quad (5.27)$$

og vi har dermed

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1} \quad (5.28)$$

Q.E.D

5.4.3 Bevis med 3-trinsreglen

Vi benytter 3-trinsreglen og beviset kan anses som en udvidelse af beviset for differentiation af x^2

1. Bestem funktionstilvæksten

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n \quad (5.29)$$

Når parenteser hæves ved at gange $x_0 + \Delta x$ med sig selv n gange fås

$$(x_0 + \Delta x)^n = x_0^n + b_1 \cdot x_0^{n-1} \cdot \Delta x + b_2 \cdot x_0^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \quad (5.30)$$

hvor b_k angiver binomialkoefficienten $b_k = \binom{n}{k}$. Uden at gå yderligere i detaljer, skal vi her blot konstatere, at b_k er en koefficient med en given værdi og vi skal udnytte at $b_1 = n$, hvorved vi har

$$\Delta y = x_0^n + n \cdot x_0^{n-1} \cdot \Delta x + b_2 \cdot x_0^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n - x_0^n \quad (5.31)$$

Vi ser, at x_0^n forekommer to gange med forskelligt fortegn og derfor går ud

$$\Delta y = n \cdot x_0^{n-1} \cdot \Delta x + b_2 \cdot x_0^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n \quad (5.32)$$

2. Bestem differenskvotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n \cdot x_0^{n-1} \cdot \Delta x + b_2 \cdot x_0^{n-2} \cdot (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x} \quad (5.33)$$

Dividerer Δx op i alle led i tælleren.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = n \cdot x_0^{n-1} + b_2 \cdot x_0^{n-2} \cdot (\Delta x) + \dots + (\Delta x)^{n-1} \quad (5.34)$$

3. Bestem differentialkvotienten

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} n \cdot x_0^{n-1} + b_2 \cdot x_0^{n-2} \cdot (\Delta x) + \dots + (\Delta x)^{n-1} \quad (5.35)$$

Alle led med Δx går mod nul, og vi har således

$$y' = n \cdot x_0^{n-1} \quad (5.36)$$

Da dette gælder for alle værdier af x_0 har vi hermed vist at

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1} \quad (5.37)$$

Q.E.D

5.5 Differentiation af en konstant gange en funktion

Sætning

Differentialkvotienten af en konstant gange en funktion $h(x) = k \cdot f(x)$ er givet ved

$$h'(x) = k \cdot f'(x)$$

Bevis

Vi benytter 3-trins reglen.

1. Bestem funktionstilvæksten

$$\Delta y = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = k \cdot f(x_0 + \Delta x) - k \cdot f(x_0) \quad (5.38)$$

2. Bestem differenskvotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{k \cdot f(x_0 + \Delta x) - k \cdot f(x_0)}{\Delta x} = \quad (5.39)$$

Sætter k uden for parentes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.40)$$

3. Bestem differentialkvotienten

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.41)$$

Eftersom

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.42)$$

har vi nu

$$y' = k \cdot f'(x_0) \quad (5.43)$$

Da dette gælder for alle værdier af x_0 har vi hermed vist at

$$h'(x) = k \cdot f'(x) \quad (5.44)$$

Q.E.D

5.6 Differentiation af summen af to funktioner

Sætning

Differentialkvotienten ved addition af to funktioner $h(x) = f(x) + g(x)$ er givet ved

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Bevis

Vi benytter 3-trins reglen.

1. Bestem funktionstilvæksten

$$\Delta y = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - (f(x_0) + g(x_0)) \quad (5.45)$$

Der minus foran parentesen, så begge led ændre fortegn, når vi hæver parentesen

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0) \quad (5.46)$$

Bytter rundt på leddene

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) \quad (5.47)$$

2. Bestem differenskvotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.48)$$

Deler brøken op i to brøker

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.49)$$

3. Bestem differentialkvotienten

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.50)$$

Eftersom

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.51)$$

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.52)$$

har vi nu

$$y' = f'(x_0) + g'(x_0) \quad (5.53)$$

Da dette gælder for alle værdier af x_0 har vi hermed vist at

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) \quad (5.54)$$

Q.E.D

Dette bevis forløber på præcis samme måde for subtraktion.

5.7 Differentiation af produktet af to funktioner

Sætning

Differentialkvotienten af et produkt $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ er givet ved

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Bevis

Vi benytter 3-trins reglen.

1. Bestem funktionstilvæksten

$$\Delta y = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0) \quad (5.55)$$

2. Bestem differenskvotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.56)$$

Lægger $f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)$ til og trækker fra i tælleren

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.57)$$

bytter rundt på ledende i tælleren

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.58)$$

og deler brøken op i to brøker

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} + \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.59)$$

sætter uden for parentes

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) + f(x_0 + \Delta x) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.60)$$

3. Bestem differentialkvotienten

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.61)$$

Eftersom

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.62)$$

$$f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \quad (5.63)$$

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.64)$$

har vi nu

$$y' = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad (5.65)$$

Da dette gælder for alle værdier af x_0 har vi hermed vist at

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (5.66)$$

Q.E.D

5.8 Differentiation af en funktion divideret med en anden funktion

Sætning

Differentialkvotienten af et produkt $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ er givet ved

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

5.8.1 Bevis med 3-trinsreglen

Vi benytter 3-trinsreglen.

1. Bestem funktionstilvæksten

$$\Delta y = h(x_0 + \Delta x) - h(x_0) = \frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)} \quad (5.67)$$

Benytter brøkreknereglen $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$

$$\Delta y = \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \quad (5.68)$$

2. Bestem differenskvotienten

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x \cdot g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \quad (5.69)$$

Lægges $f(x_0) \cdot g(x_0)$ til og trækker fra i tælleren

$$\Delta y = \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x \cdot g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \quad (5.70)$$

bytter rundt på ledende i tælleren

$$\Delta y = \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x \cdot g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \quad (5.71)$$

sætter uden for parentes

$$\Delta y = \frac{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x \cdot g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \quad (5.72)$$

Dividerer Δx op i tælleren

$$\Delta y = \frac{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \quad (5.73)$$

3. Bestem differentialkvotienten

Tager grænseværdien for $\Delta x \rightarrow 0$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \quad (5.74)$$

Eftersom

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (5.75)$$

$$g'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \quad (5.76)$$

$$g(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) \quad (5.77)$$

har vi nu

$$y' = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0) \cdot g(x_0)} \quad (5.78)$$

Da dette gælder for alle værdier af x_0 har vi hermed vist at

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad (5.79)$$

Q.E.D

5.8.2 Bevis ved brug af andre regneregler

I dette bevis skal vi gøre brug af følgende regneregler:
differentiation af x^{-1} ud fra x^n -reglen (se kapitel 5.4)

$$\text{for } f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \text{er} \quad f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad (5.80)$$

differentiation af et produkt af to funktioner (se kapitel 5.7)

$$\text{for } h(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{er} \quad h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (5.81)$$

kædereglens ved differentiation af en sammensat funktion

$$\text{for } h(x) = f(g(x)) \quad \text{er} \quad h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (5.82)$$

Vi har en funktion

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (5.83)$$

Vi kan omskrive til

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)^{-1} \quad (5.84)$$

hvor $g(x)^{-1}$ her betyder divideret med, og ikke her må forveksles med $g^{-1}(x)$, som er den omvendte funktion af $g(x)$. Ud fra 5.80 og 5.82 har vi at den afledte af $g(x)^{-1}$ er

$$(g(x)^{-1})' = -\frac{1}{(g(x))^2} \cdot g'(x) = -\frac{g'(x)}{(g(x))^2} \quad (5.85)$$

Vi anvender nu 5.81 på 5.84

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x)^{-1} + f(x) \cdot (g(x)^{-1})' \quad (5.86)$$

Substituerer $g(x)^{-1}$ '

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x)^{-1} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{(g(x))^2} \quad (5.87)$$

Sætter på brøkform

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \quad (5.88)$$

Forlænger første led med $g(x)$ og sætter på fællesnævner

$$h'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \quad (5.89)$$

Q.E.D.

5.9 Tangentens ligning

Sætning

Tangenten til grafen for en differentiabel funktion $f(x)$ har ligningen

$$y = f'(x) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Bevis

En tangent er en ret linje, der netop skærer grafen i et punkt, som vi her kalder (x_0, y_0) . Hældningskoefficienten a til tangenten er givet ved

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0} \quad (5.90)$$

hvor (x, y) er et vilkårligt punkt på den rette linje¹

Vi kan gange begge sider af ligningen med $(x - x_0)$ og lægge y_0 til på begge sider og får derved linjens ligning for en linje med kendt hældningskoefficient a og som går gennem et kendt punkt (x_0, y_0)

$$y = a(x - x_0) + y_0 \quad (5.91)$$

Eftersom punktet (x_0, y_0) også ligger på grafen for $f(x)$, har vi

$$y_0 = f(x_0) \quad (5.92)$$

Eftersom tangenten har samme hældning som grafen i punktet (x_0, y_0) , har vi at linjens h

$$a = f'(x_0) \quad (5.93)$$

Vi substituerer de to udtryk ind i 5.91 og får derved tangentens ligning

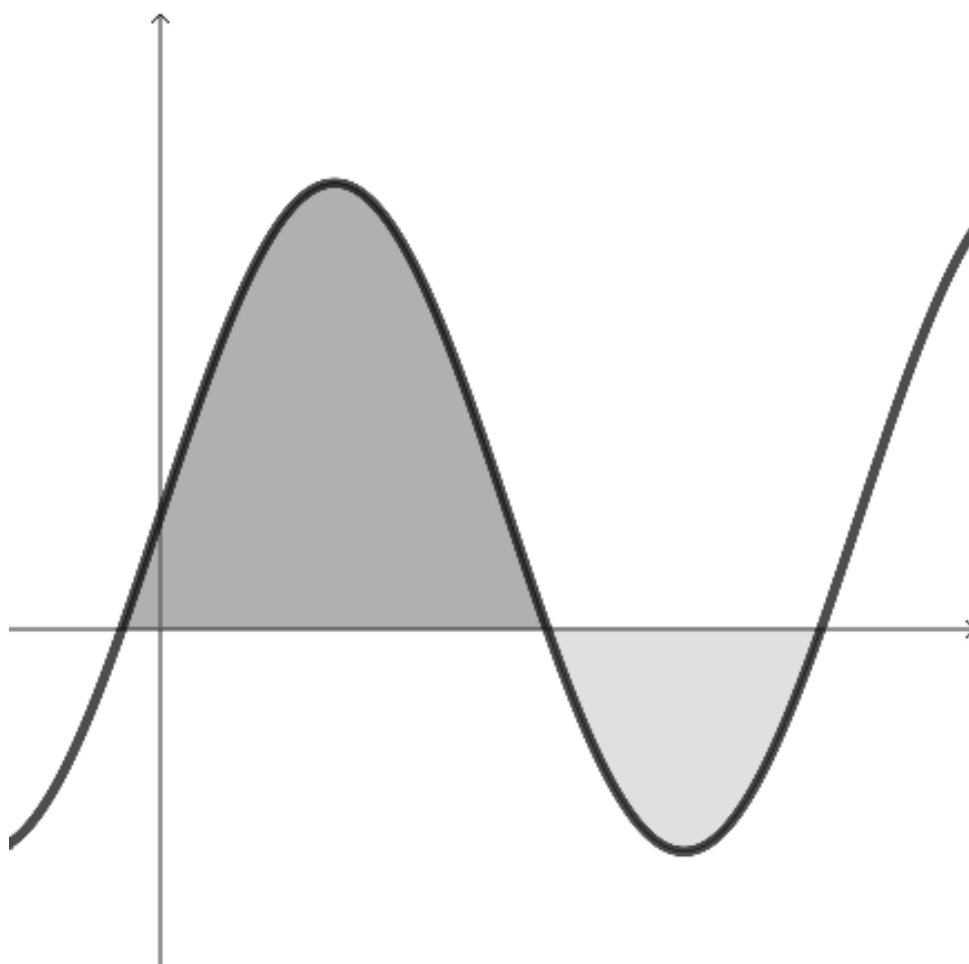
$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad (5.94)$$

Q.E.D

¹Helt formelt alle punkter på den rette linje undtagen (x_0, y_0) , da det ville give en division med nul.

Kapitel 6

Integralregning



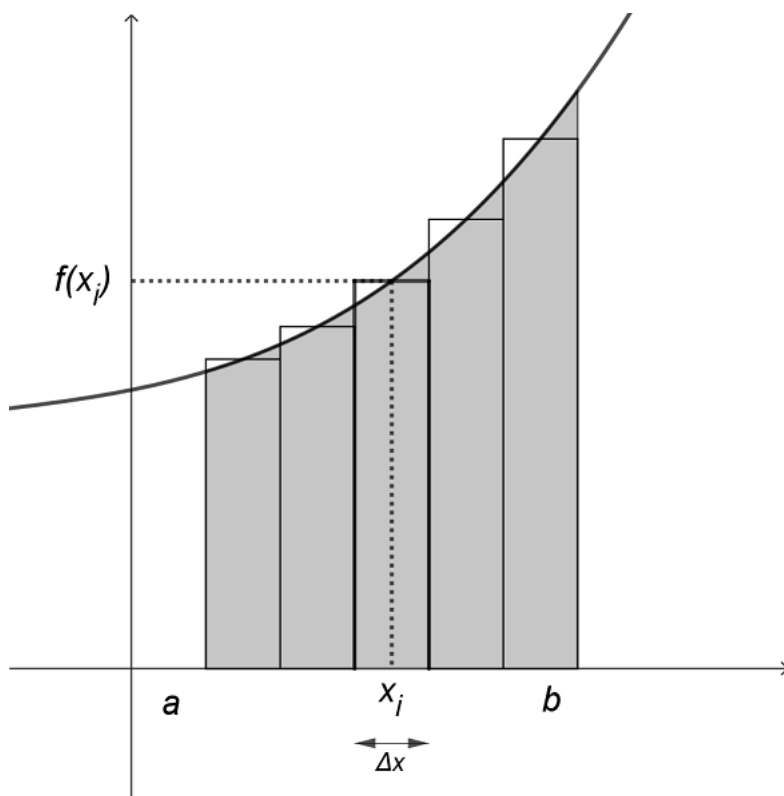
6.1 Arealet under en graf

Sætning

Arealet under grafen for en funktion $f(x)$ over x-aksen, for $x \in [a; b]$, og hvor $f(x)$ er kontinuert i intervallet, beregnes som det bestemte integral

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Bevis



Figur 6.1: Areal under grafen. Den i 'te kolonne har bredde Δx og højde $f(x_i)$.

Vi skal bestemme arealet af det grå område vist i figur 6.1, hvor $x \in [a; b]$. Vi gør dette ved at inddele intervallet i et antal kolonner hver med bredde Δx . Antallet af kolonner må således være

$$n = \frac{b - a}{\Delta x} \quad (6.1)$$

Den i 'te kolonne har således x-koordinat x_i og har dermed højden $f(x_i)$, og arealet af den i 'te kolonne er derfor

$$A_i = f(x_i) \cdot \Delta x \quad (6.2)$$

Summen arealerne for alle kolonner

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \quad (6.3)$$

er således tilnærmet arealet af det mørkegrå område .

Når vi tager grænseværdien $\Delta x \rightarrow 0$ svarer det til $n \rightarrow \infty$, og summen af kolonnernes arealer vil nærme sig det grå område. Vi har derfor at arealet af det mørkegrå område er

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x \quad (6.4)$$

Og vi skriver dette som et bestemt integral

$$A = \int_a^b f(x) \cdot dx \quad (6.5)$$

Et integral kan således opfattes som en sum af infinitesimale størrelser.

Q.E.D

6.2 Infinitesimalregningens fundamentalsætning

Sætning

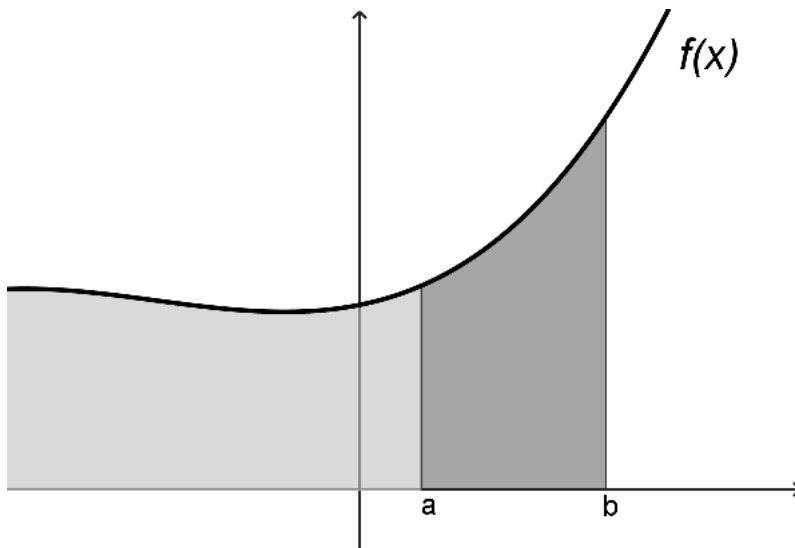
For en kontinuert funktion i intervallet $x \in [a : b]$ gælder i følge infinitesimalregningens fundamentalsætning, at det bestemte integral beregnes som

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Hvis $f(x) > 0$ for $x \in [a; b]$ så er det bestemte integral netop lig arealet under grafen i intervallet.

Bevis

Vi viser her for en monotont voksende funktion. For en aftagende funktion gælder samme bevis, dog med omvendte større-end/mindre-end tegn, og hvis man har en funktion med flere monotoniintervaller deles intervallet op i monotone stykker.



Figur 6.2: Areal under grafen. Det lysegrå areal svarer til $A(a)$, og det mørkegrå areal er givet ved $A(b) - A(a)$.

Med $A(x)$ betegnes en arealfunktion, således at $A(a)$ er arealet mellem funktionen og x-aksen for $x \leq a$ vist som det lysegrå område i figur 6.2, og arealet af det mørkegrå område for intervallet $x \in [a : b]$ derfor være $A(b) - A(a)$.

Arealet af det mørkegrå område bestemmes som det bestemte integral for $x \in [a : b]$. Dette vises i afsnit 6.1 og skrives som

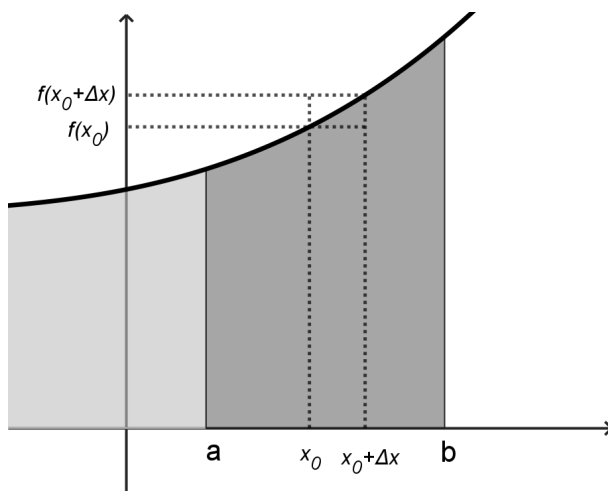
$$A = \int_a^b f(x)dx \quad (6.6)$$

Arealet under grafen for intervallet $[x_0 : x_0 + \Delta x]$ kan skrives ved hjælp af arealfunktionen som

$$A(x_0 + \Delta x) - A(x_0) \quad (6.7)$$

Vi ser at areal er mellem den lille kolonne med areal $f(x_0)\Delta x$ og den store kolonne med areal $f(x_0 + \Delta x)\Delta x$, dvs.

$$f(x_0)\Delta x \leq A(x_0 + \Delta x) - A(x_0) \leq f(x_0 + \Delta x)\Delta x \quad (6.8)$$



Figur 6.3: Arealet for kolonne mellem x_0 og $x_0 + \Delta x$.

Vi dividere med Δx

$$f(x_0) \leq \frac{A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)}{\Delta x} \leq f(x_0 + \Delta x) \quad (6.9)$$

og ser at midterste led er arealfunktionens differenskvotient. Vi tager nu grænseværdien for $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) \quad (6.10)$$

Herved bliver differenskvotienten til differentialkvotienten af arealfunktionen, og $f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$

$$f(x_0) \leq A'(x_0) \leq f(x_0) \quad (6.11)$$

Dette kan kun lade sig gøre, når

$$A'(x) = f(x) \quad (6.12)$$

Vi integrere på begge sider

$$\int A'(x) dx = \int f(x) dx \quad (6.13)$$

og ser får derfor, at $A(x)$ er en stamfunktion til $f(x)$

$$A(x) = F(x) + k \quad (6.14)$$

Dermed er det grå areal lig med

$$A(b) - A(a) = F(b) + k - (F(a) + k) = F(b) - F(a) \quad (6.15)$$

Vi har derfor nu vist at arealet under grafen er givet ved

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \quad (6.16)$$

Vi indfører nu notationen

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (6.17)$$

og har nu

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \quad (6.18)$$

Q.E.D

6.3 Kurvelængde

Sætning

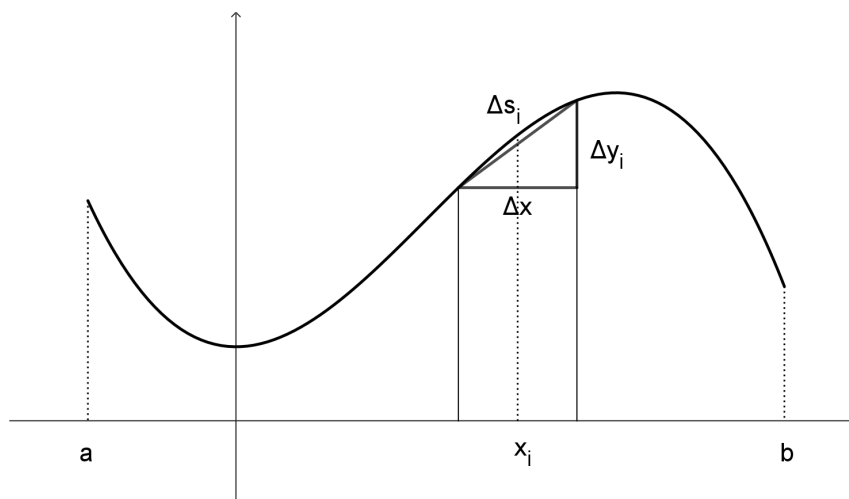
Længden af en graf for en kontinuert funktion $f(x)$ for $x \in [a; b]$ beregnes som det bestemte integral

$$A = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Bevis

Vi skal bestemme længde af grafen for $f(x)$ fra $x = a$ til $x = b$. Vi gør dette ved at inddele intervallet i et antal kolonner hver med bredde Δx . Antallet af kolonner må således være

$$n = \frac{b - a}{\Delta x} \quad (6.19)$$



Figur 6.4: Længde af en graf. Den i 'te kolonne har bredde Δx .

Den i 'te kolonne er skitseret i figur 6.4. Kolonnen har bredde Δx , og en tilnærmet værdi for længden af kurvestykket bestemmes ved hjælp af Pythagoras sætning som

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_i^2} \quad (6.20)$$

Vi forlænger Δy_i^2 med Δx^2 og får dermed

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta x^2 \cdot \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \quad (6.21)$$

Vi sætter Δx^2 uden for en parentes

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x^2 \cdot \left(1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2\right)} \quad (6.22)$$

Ved benyttelse af regneregler for kvadratrods $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ fås

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \quad (6.23)$$

Den samlede kurvelængde er tilnærmelsesvis summen af alle kurvestykker

$$L = \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \quad (6.24)$$

Når vi tager grænseværdien $\Delta x \rightarrow 0$ svarer det til $n \rightarrow \infty$, og summen af de små rettelinede kurvestykker vil nærme sig længden af grafen

$$L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \quad (6.25)$$

Fra differentialregningen har vi at

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_i}{\Delta x} = f'(x_i) \quad (6.26)$$

og summen skrives som det bestemte integral

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (6.27)$$

Q.E.D

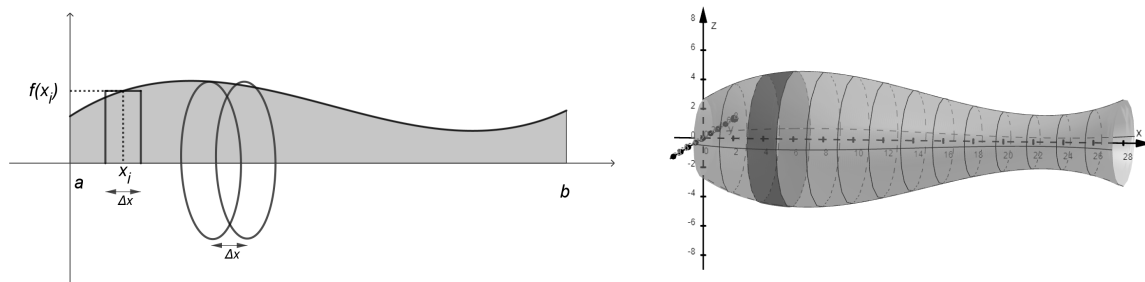
6.4 Volumen af omdrejningslegeme roteret om x-aksen

Sætning

Volumet af et omdrejningslegeme, begrænset af en funktion $f(x)$, der er roteret omkring x-aksen, for $x \in [a; b]$ beregnes som det bestemte integral

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx$$

Bevis



Figur 6.5: Volumen af omdrejningslegeme roteret om x-aksen. Den i 'te skive har bredde Δx og radius givet ved $f(x_i)$.

Vi skal bestemme volumet af det grå område vist i figur 6.5 (til højre), hvor $x \in [a; b]$. Formen er fremkommet ved at rotere grafen for funktionen omkring x-aksen. Vi finder volumet ved at inddele intervallet i et antal skiver hver med bredde Δx . Antallet af koller må således være

$$n = \frac{b-a}{\Delta x} \quad (6.28)$$

Den i 'te skive har således x-koordinat x_i og har dermed radius givet ved $f(x_i)$, og arealet af den i 'te skive er derfor

$$A_i = \pi(f(x_i))^2 \quad (6.29)$$

og volumet af skiven er

$$V_i = \pi(f(x_i))^2 \cdot \Delta x \quad (6.30)$$

Summen volumerne for alle skiver

$$\sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \pi(f(x_i))^2 \cdot \Delta x \quad (6.31)$$

er således tilnærmet volumet af omdrejningslegemet.

Når vi tager grænseværdien $\Delta x \rightarrow 0$ svarer det til $n \rightarrow \infty$, og summen af skivernes volumener vil nærme sig det grå område. Vi har derfor at volumet af omdrejningslegemet vist som det mørkegrå område er

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi(f(x_i))^2 \cdot \Delta x \quad (6.32)$$

og altså givet ved det bestemte integral

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx \quad (6.33)$$

Q.E.D

6.5 Overfladeareal af omdrejningslegeme roteret om x-aksen

Sætning

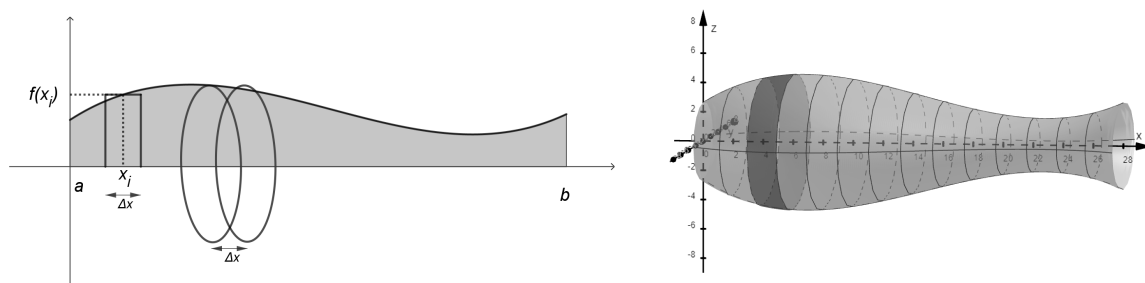
Overfladearealet af et omdrejningslegeme, begrænset af en funktion $f(x)$, der er roteret omkring x-aksen, for $x \in [a; b]$ beregnes som det bestemte integral

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

Bemærk i øvrigt, at dette er arealet uden endeflader. Hvis de to endeflader skal regnes med, beregnes disse som to cirkelskiver med radius henholdsvis $f(a)$ og $f(b)$

$$A_{\text{endeflader}} = \pi f(a)^2 + \pi f(b)^2 \quad (6.34)$$

Bevis



Figur 6.6: Arealet af omdrejningslegeme roteret om x-aksen. Den i 'te skive har bredde Δx og radius givet ved $f(x_i)$.

Vi beviser først for overfladeareal uden endeflader. Vi skal bestemme arealet af det grå område vist i figur 6.6 (til højre), hvor $x \in [a; b]$. Formen er fremkommet ved at rotere grafen for funktionen omkring x-aksen. Vi finder arealet ved at inddele intervallet i et antal skiver hver med tykkelse Δx . Antallet af kolloner må således være

$$n = \frac{b - a}{\Delta x} \quad (6.35)$$

Sidelængden af den i 'te skive er givet ved

$$\Delta s_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \quad (6.36)$$

som forklaret i afsnit 6.3 og figur 6.4.

Den i 'te skive har således x-koordinat x_i og har dermed radius givet ved $f(x_i)$, og omkredsen af den i 'te skive er derfor

$$O_i = 2\pi f(x_i) \quad (6.37)$$

og det ydre areal af skiven er

$$A_i = O_i \cdot \Delta s_i = 2\pi f(x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \cdot \Delta x \quad (6.38)$$

Summen af areal for alle skiver

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \quad (6.39)$$

er således tilnærmet arealet af omdrejningslegemet.

Når vi tager grænseværdien $\Delta x \rightarrow 0$ svarer det til $n \rightarrow \infty$, og summen af skivernes overfladearealer vil nærme sig det grå område. Vi har derfor at arealet af omdrejningslegemet vist som det mørkegrå område er

$$A = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i) \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right)^2} \Delta x \quad (6.40)$$

Fra differentialregningen har vi at

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y_i}{\Delta x} = f'(x_i) \quad (6.41)$$

og summen skrives som det bestemte integral

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (6.42)$$

Hvis figuren er lukket og de to endeflader skal regnes adderes med deres areal. Eftersom de har cirkelform med radius hhv. $f(a)$ og $f(b)$ er arealet af de to endeflader givet ved

$$A = \pi f(a)^2 + \pi f(b)^2 \quad (6.43)$$

Q.E.D

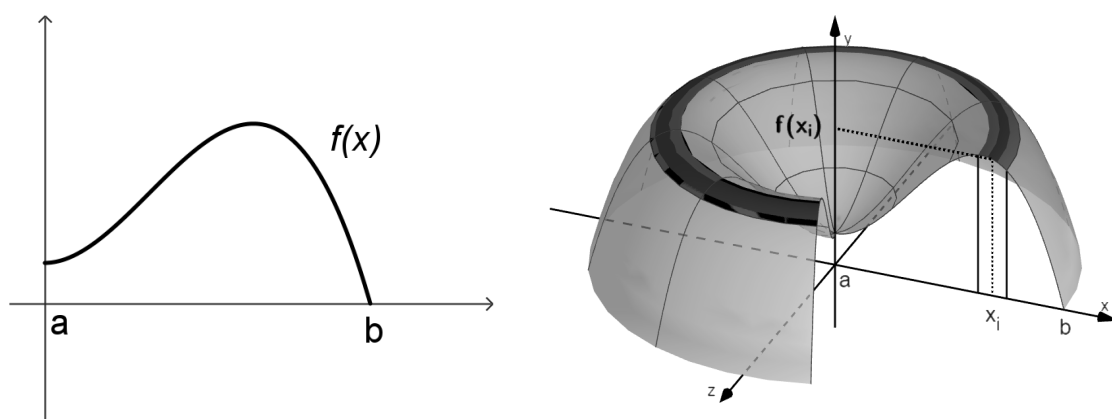
6.6 Volumen af omdrejningslegeme roteret om y-aksen

Sætning

Volumet af et omdrejningslegeme, begrænset af en funktion $f(x)$, der er roteret omkring y-aksen, for $x \in [a; b]$ beregnes som det bestemte integral

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

Bevis



Figur 6.7: Volumen af omdrejningslegeme roteret om y-aksen. Den i 'te skive har bredde Δx og radius givet ved x og højden $f(x_i)$.

Vi skal bestemme volumet af det grå område vist i figur 6.7 (til højre), hvor $x \in [a; b]$. Formen er fremkommet ved at rotere grafen for funktionen omkring y-aksen. Vi finder volumet ved at inddele intervallet i et antal ringe hver med tykkelse Δx . Antallet af ringe/kolonner må således være

$$n = \frac{b - a}{\Delta x} \quad (6.44)$$

Den i 'te ring har således x-koordinat x_i og har dermed radius givet ved x_i , og omkredsen af den i 'te ring er derfor

$$O_i = 2\pi x_i \quad (6.45)$$

og volumet af ringen er

$$V_i = 2\pi x_i f(x_i) \Delta x \quad (6.46)$$

Summen volumerne for alle ringe

$$\sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n 2\pi x_i f(x_i) \Delta x \quad (6.47)$$

er således tilnærmet volumet af omdrejningslegemet.

Når vi tager grænseværdien $\Delta x \rightarrow 0$ svarer det til $n \rightarrow \infty$, og summen af ringenes volumener vil nærme sig det grå område. Vi har derfor at volumet af omdrejningslegemet vist som det grå område er

$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 2\pi x_i f(x_i) \Delta x \quad (6.48)$$

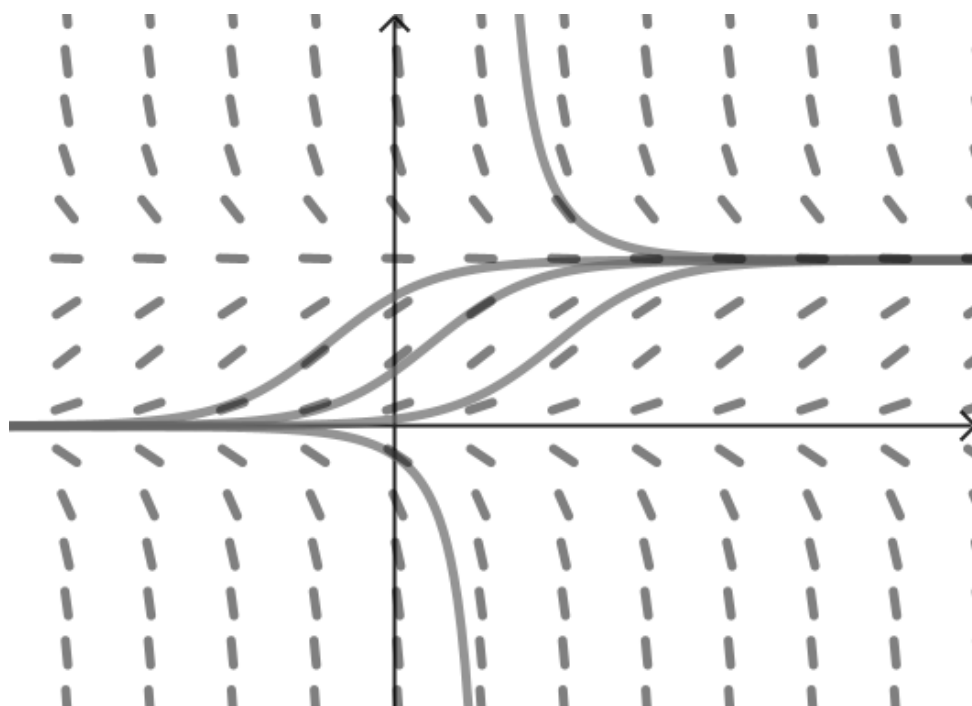
og altså givet ved det bestemte integral

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx \quad (6.49)$$

Q.E.D

Kapitel 7

Differentialligninger



7.1 $y' = a \cdot y$

Sætning

Differentialligningen $y' = a \cdot y$ har den fuldstændige løsning $y = c \cdot e^{ax}$, hvor a og c er reelle tal, og $a \neq 0$.

Ligningen kan udtrykkes således:

En funktions differentialkvotient y' er proportional med funktionen selv.

Bevis

Det ses umiddelbart, at for $y' = 0$ har vi en konstant funktion, dvs. $y = c$. Dette svarer til, at konstanten $a = 0$.

For $a \neq 0$ gælder følgende

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \quad (7.1)$$

Variablene separeres med y på venstresiden og x på højresiden

$$\frac{1}{y} dy = a \cdot dx \quad (7.2)$$

Nu integreres på begge sider af lighedstegnet

$$\int \frac{1}{y} dy = \int a \cdot dx \quad (7.3)$$

og bestemmer på den måde stamfunktion. Der kommer en integrationskonstant på begge sider, k_1 og k_2

$$\ln(|y|) + k_1 = a \cdot x + k_2 \quad (7.4)$$

k_1 trækkes fra på begge sider af lighedstegnet og de to konstanter samles på den måde på højresiden i en konstant $k_3 = k_2 - k_1$

$$\ln(|y|) = a \cdot x + k_3 \quad (7.5)$$

Det bemærkes, at man kun kan tage logaritmen til en positiv værdi, og stamfunktionen til $\frac{1}{y}$ er således $\ln(|y|)$. Der tages eksponentielfunktionen på begge sider. Eftersom den naturlige logaritme og eksponentialfunktion er omvendte funktioner, dvs. $e^{\ln(x)} = x$ fås

$$|y| = e^{a \cdot x + k_3} \quad (7.6)$$

Ved anvendelse af potensregnereglen $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ fås

$$|y| = e^{ax} \cdot e^{k_3} \quad (7.7)$$

Der indføres en ny konstant $k_4 = e^{k_3}$. Det bemærkes, at k_4 har positiv værdi, eftersom værdimængden af eksponentialfunktionen er alle reelle tal større end 0.

$$|y| = k_4 \cdot e^{ax} \quad (7.8)$$

Den numeriske værdi af y kan hæves, ved at indføre en ny (og sidste) konstant c , da vi kan vælge fortegn på konstanten, således at $c = \pm k_4$

$$y = c \cdot e^{ax} \quad (7.9)$$

Q.E.D

7.2 $y' = a \cdot y + b$

Sætning

Differentialligningen $y' = a \cdot y + b$ har den fuldstændige løsning $y = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax}$, hvor a , b og c er reelle tal, og $a \neq 0$.

Ligningen kan udtrykkes således:

En funktions differentialkvotient y' er lineær afhængig af funktionen selv.

7.2.1 Kort bevis ved benyttelse af substitution

Vi har ligningen

$$y' = a \cdot y + b \quad (7.10)$$

Vi indfører betegnelsen $y = f(x)$, så $y' = f'(x)$ og får dermed

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b \quad (7.11)$$

Andet led forlænges med a , dvs. b ganges og divideres med a

$$f'(x) = a \cdot f(x) + a \cdot \frac{b}{a} \quad (7.12)$$

a sættes uden for parentes

$$f'(x) = a \cdot \left(f(x) + \frac{b}{a} \right) \quad (7.13)$$

Vi indfører nu funktionen $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$. Da sidste led $\frac{b}{a}$ er konstant, har vi $g'(x) = f'(x)$. Vi substituere i ligningen og får

$$g'(x) = a \cdot g(x) \quad (7.14)$$

Dette svarer til ligningen $y' = a \cdot y$, med den generelle løsning $y = c \cdot e^{ax}$, så vi har altså

$$g(x) = c \cdot e^{ax} \quad (7.15)$$

Vi genindfører $f(x)$ og får

$$f(x) = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax} \quad (7.16)$$

Vi genindfører $y = f(x)$ og får

$$y = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax} \quad (7.17)$$

Q.E.D

7.2.2 Langt bevis ved benyttelse af separation af variable

Vi ser umiddelbart, at for $y' = 0$ har vi $a \cdot y + b = 0$, dvs. $y = -\frac{b}{a}$. Dette svarer til, at konstanten $c = 0$.

For $a \cdot y + b \neq 0$ gælder følgende

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y + b \quad (7.18)$$

Vi separerer variablene med x på højresiden og y på venstresiden

$$\frac{dy}{a \cdot y + b} = dx \quad (7.19)$$

Vi indfører variablen u med henblik på substitution

$$u = a \cdot y + b \quad (7.20)$$

Vi differentierer u med hensyn til y

$$du/dy = a \quad (7.21)$$

Vi ganger med dy og dividerer med a og får derved

$$dy = \frac{1}{a} du \quad (7.22)$$

Vi substituere i ligningen ovenfor

$$\frac{dy}{a \cdot y + b} = \frac{1}{a} \frac{1}{u} du = dx \quad (7.23)$$

Nu integreres på begge sider af lighedstegnet

$$\int \frac{1}{a} \frac{1}{u} du = \int dx \quad (7.24)$$

og bestemmer på den måde stamfunktion. Der kommer en integrationskonstant på begge sider, men de samles på højresiden i én konstant k_1

$$\frac{1}{a} \ln(|u|) = x + k_1 \quad (7.25)$$

Det bemærkes, at man kun kan tage logaritmen til en positiv værdi, og stamfunktionen til $\frac{1}{u}$ er således $\ln(|u|)$. Der ganges med a på begge sider af lighedstegnet

$$\ln(|u|) = a \cdot x + k_2 \quad (7.26)$$

hvor $k_2 = a \cdot k_1$. Vi tager nu eksponentielfunktionen på begge sider

$$|u| = e^{ax+k_2} \quad (7.27)$$

Vi anvender potensregnereglen $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$

$$|u| = e^{ax} e^{k_2} \quad (7.28)$$

Nu idføres en ny konstant $k_3 = e^{k_2}$. Den numeriske værdi af u kan hæves, da vi kan vælge fortegn på konstanten, således at for $k_4 = \pm k_3$ har vi

$$u = k_4 \cdot e^{ax} \quad (7.29)$$

Nu substitueres $u = a \cdot x + b$ ind i ligningen igen

$$a \cdot x + b = k_4 \cdot e^{ax} \quad (7.30)$$

Trækker b fra på begge sider og dividerer igennem med a

$$y = -\frac{b}{a} + \frac{k_4}{a} \cdot e^{ax} \quad (7.31)$$

Indfører en ny konstant $c = \frac{k_4}{a}$ og får derved

$$y = -\frac{b}{a} + c \cdot e^{ax} \quad (7.32)$$

Q.E.D

7.3 Den maksimale hældning for logistisk vækst

Sætning

Den største tangenthældning for en logistisk vækstkurve er $y' = \frac{1}{4} \cdot k \cdot a^2$ og findes hvor $y = \frac{1}{2}a$, når vækstkurven er bestemt af ligningen $y' = k \cdot y \cdot (a - y)$, hvor $a > 0$ og $k > 0$.

7.3.1 Bevis ved benyttelse af parablens toppunkt

Vi har følgende differentialligning

$$y' = k \cdot y \cdot (a - y) \quad (7.33)$$

Ganger $k \cdot y$ ind i parentesen

$$y' = k \cdot a \cdot y - k \cdot y^2 \quad (7.34)$$

y' ses at være en funktion af y , og vi sætter $y' = g(y)$

$$g(y) = (k \cdot a \cdot y - k \cdot y^2) \quad (7.35)$$

Vi ser at dette er et andetgrads polynomium, hvis graf kaldes en parabel

$$g(y) = A \cdot y^2 + B \cdot y + C \quad (7.36)$$

hvor $A = -k$, $B = k \cdot a$ og $C = 0$. Parablens toppunkt er givet ved $T = (-\frac{B}{2A}, -\frac{B^2-4AC}{4A})$. Vi ser derfor at den maksimale hældning findes, hvor y er givet ved toppunktets x -koordinat

$$y = -\frac{B}{2A} = -\frac{k \cdot a}{2 \cdot -k} = \frac{1}{2}a \quad (7.37)$$

Den maksimale hældning bestemmes ved at indsætte i differentialligningen

$$y' = k \cdot \frac{1}{2}a \cdot (a - \frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}ka^2 \quad (7.38)$$

Q.E.D

7.3.2 Bevis ved benyttelse af maksimering

Vi har følgende differentialligning

$$y' = k \cdot y \cdot (a - y) \quad (7.39)$$

Ganger $k \cdot y$ ind i parentesen

$$y' = k \cdot a \cdot y - k \cdot y^2 \quad (7.40)$$

y' svarer til hældningen, som vi her vil kalde α . Vi ser fra differentialligningen at α afhænger af y , og α kan derfor betragtes som en funktion af y

$$\alpha(y) = k \cdot a \cdot y - k \cdot y^2 \quad (7.41)$$

Vi differentierer α med hensyn til y og sætter lig med nul for at finde den maksimale værdi

$$\alpha'(y) = k \cdot a - 2 \cdot k \cdot y = 0 \quad (7.42)$$

Vi skal isolere y . Vi lægger $2 \cdot k \cdot y$ til på begge sider af lighedstegnet

$$2 \cdot k \cdot y = k \cdot a \quad (7.43)$$

og dividere med $2k$ på begge sider

$$y = \frac{1}{2}a \quad (7.44)$$

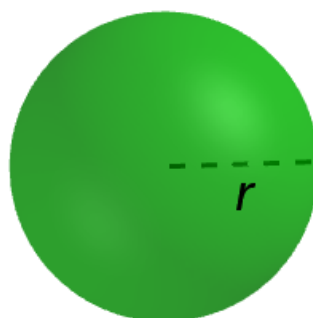
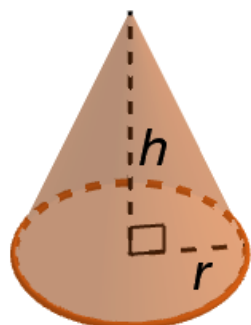
Den maksimale hældning findes altså hvor $y = \frac{1}{2}a$. Den maksimale hældning bestemmes ved at indsætte i differentialligningen

$$y' = k \cdot \frac{1}{2}a \cdot (a - \frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}ka^2 \quad (7.45)$$

Q.E.D

Kapitel 8

Rumlige figurer



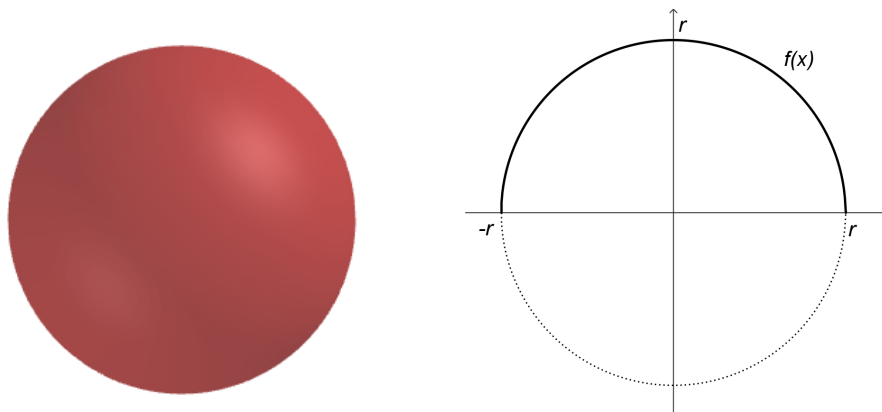
8.1 Volumen af en kugle

Sætning

Volumet af en kugle beregnes som

$$V = \frac{4\pi}{3}r^3$$

Bevis



Figur 8.1: Volumen af kugle bestemmes ud fra omdrejningslegemet af en halvcirkel roteret om x-aksen.

Vi bestemmer volumet af en kugle som volumet af et omdrejningslegeme af en halvcirkel, og vi følger således kapitel 6.4.

En cirkel med centrum i $(0,0)$ og med radius r er givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (8.1)$$

Vi trækker x^2 på fra på begge sider af lighedstegnet

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad (8.2)$$

Der er to løsninger (som er skitseret i figur 8.1)

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{og} \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2} \quad (8.3)$$

for hhv. $y > 0$ og $y < 0$. Da vi kigger på et omdrejningslegeme, benytter vi i det følgende blot den første for $y > 0$.

Vi har altså funktionen

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (8.4)$$

Volumet af omdrejningslegemet er givet ved

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx \quad (8.5)$$

hvilket er bevist i kapitel 6.4. Vi indsætter funktionsudtrykket

$$V = \int_{-r}^r \pi \sqrt{r^2 - x^2}^2 dx \quad (8.6)$$

Kvadratroden og eksponenten 2 går ud med hinanden, og π er en konstant, der går uden foran integralet

$$V = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \quad (8.7)$$

Bestemmer stamfunktion

$$V = \pi \left[(r^2 \cdot x - \frac{1}{3}x^3) \right]_{-r}^r \quad (8.8)$$

Indsætter grænserne (og husker minus for nederste grænse)

$$V = \pi(r^3 - \frac{1}{3}r^3 - (-r^3 + \frac{1}{3}r^3)) \quad (8.9)$$

Hæver minusparentesen

$$V = \pi(r^3 - \frac{1}{3}r^3 + r^3 - \frac{1}{3}r^3) \quad (8.10)$$

Sætter r^3 uden for parentes

$$V = \pi(1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3})r^3 \quad (8.11)$$

Sætter på fælles brøkstreg

$$V = \pi \frac{3 - 1 + 3 - 1}{3} r^3 \quad (8.12)$$

Og får dermed

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3 \quad (8.13)$$

Q.E.D

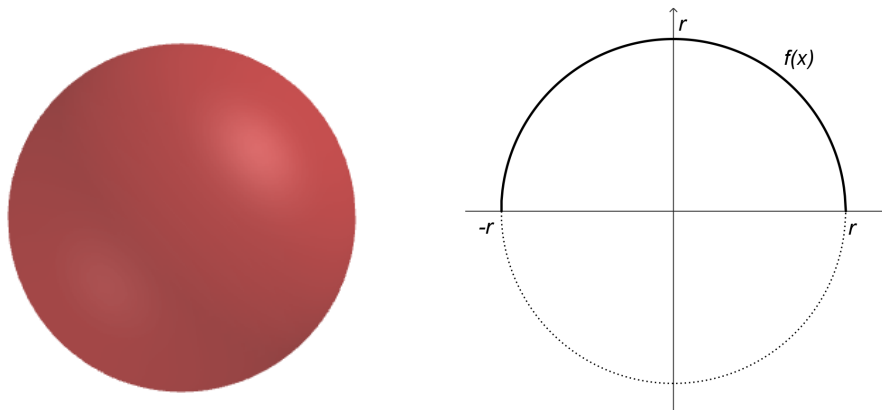
8.2 Overfladearealet af en kugle

Sætning

Overfladearealet af en kugle beregnes som

$$V = 4\pi r^2$$

Bevis



Figur 8.2: Overfladearealet af kugle bestemmes ud fra omdrejningslegemet af en halvcirkel roteret om x-aksen.

Vi bestemmer overfladearealet af en kugle som overfladearealet af et omdrejningslegeme af en halvcirkel, og vi følger således kapitel 6.5.

En cirkel med centrum i $(0, 0)$ og med radius r er givet ved ligningen

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad (8.14)$$

Vi trækker x^2 på fra på begge sider af lighedstegnet

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad (8.15)$$

Der er to løsninger (som er skitseret i figur 8.1)

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{og} \quad y = -\sqrt{r^2 - x^2} \quad (8.16)$$

for hhv. $y > 0$ og $y < 0$. Da vi kigger på et omdrejningslegeme, benytter vi i det følgende blot den første for $y > 0$.

Vi har altså funktionen

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (8.17)$$

Vi skal også bruge differentialkvotienten af funktionen. Det er en sammensat funktion med ydrefunktion $y(x) = \sqrt{x}$ og dermed $y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og en indre funktion $i(x) = r^2 - x^2$ og dermed $i'(x) = -2x$, og vi har således ved brug af kædereqlen

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2}} * (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \quad (8.18)$$

og vi har derfor at

$$f'(x)^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2} \quad (8.19)$$

Overfladearealet af omdrejningslegemet er givet ved

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (8.20)$$

hvilket er bevist i kapitel 6.5. Vi indsætter funktionsudtrykket og den afledte funktion

$$A = \int_{-r}^r 2\pi \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \quad (8.21)$$

Ganger de to kvadratrødder sammen

$$A = \int_{-r}^r 2\pi \sqrt{r^2 - x^2 + \frac{x^2 \cdot (r^2 - x^2)}{r^2 - x^2}} dx \quad (8.22)$$

Forkorter $(r^2 - x^2)$ i sidste led

$$A = \int_{-r}^r 2\pi \sqrt{r^2 - x^2 + x^2} dx \quad (8.23)$$

x^2 går ud pga. fortegn

$$A = \int_{-r}^r 2\pi \sqrt{r^2} dx \quad (8.24)$$

Radius er altid en positiv størrelse og vi har nu

$$A = \int_{-r}^r 2\pi r dx \quad (8.25)$$

Bestemmer stamfunktion, idet $2\pi r$ er konstanter

$$A = [2\pi r x]_{-r}^r \quad (8.26)$$

Indsætter grænserne (og husker minus for nederste grænse)

$$A = 2\pi r \cdot r - 2\pi r \cdot (-r) \quad (8.27)$$

Hvorved vi får

$$A = 4\pi r^2 \quad (8.28)$$

Q.E.D

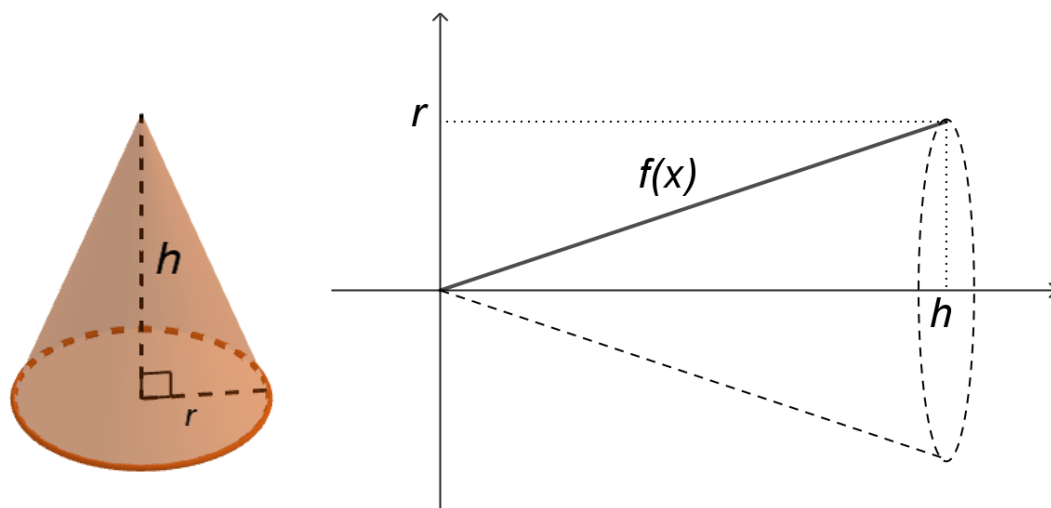
8.3 Volumen af en kegle

Sætning

Volumet af en kegle beregnes som

$$V = \frac{1}{3}h \cdot G = \frac{\pi}{3}h \cdot r^2$$

Bevis



Figur 8.3: Volumen af kegle bestemmes ud fra en ret linje roteret om x-aksen.

Vi bestemmer volumet af en kegle som volumet af et omdrejningslegeme af en ret linje (se figur 8.3, og vi følger således kapitel 6.4.

Vi lægger keglen med top i Origo $(0,0)$, og siden giver således en ret linje med hældningskoefficient $\frac{r}{h}$. Siden udgør derfor en ret linje beskrevet af funktionen

$$f(x) = \frac{r}{h} \cdot x \quad (8.29)$$

Volumet af omdrejningslegemet er givet ved

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx \quad (8.30)$$

hvilket er bevist i kapitel 6.4. Vi indsætter funktionsudtrykket

$$V = \int_0^h \pi\left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx \quad (8.31)$$

Som giver

$$V = \int_0^h \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2 dx \quad (8.32)$$

Da π , r og h er konstanter, kan de sættes uden for integrationen

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \int_0^h x^2 dx \quad (8.33)$$

Bestemmer stamfunktion

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^h \quad (8.34)$$

Indsætter grænserne, og eftersom nederste grænse er 0 giver den $0^3 = 0$, så det skriver vi ikke

$$V = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} (h^3) \quad (8.35)$$

Da $\frac{h^3}{h^2} = h$ fås

$$V = \frac{1}{3} h \pi r^2 \quad (8.36)$$

Eftersom bunden af keglen er cirkulær er grundfladen

$$G = \pi r^2 \quad (8.37)$$

og vi har derfor

$$V = \frac{1}{3} h \cdot G = \frac{\pi}{3} h \cdot r^2 \quad (8.38)$$

Q.E.D

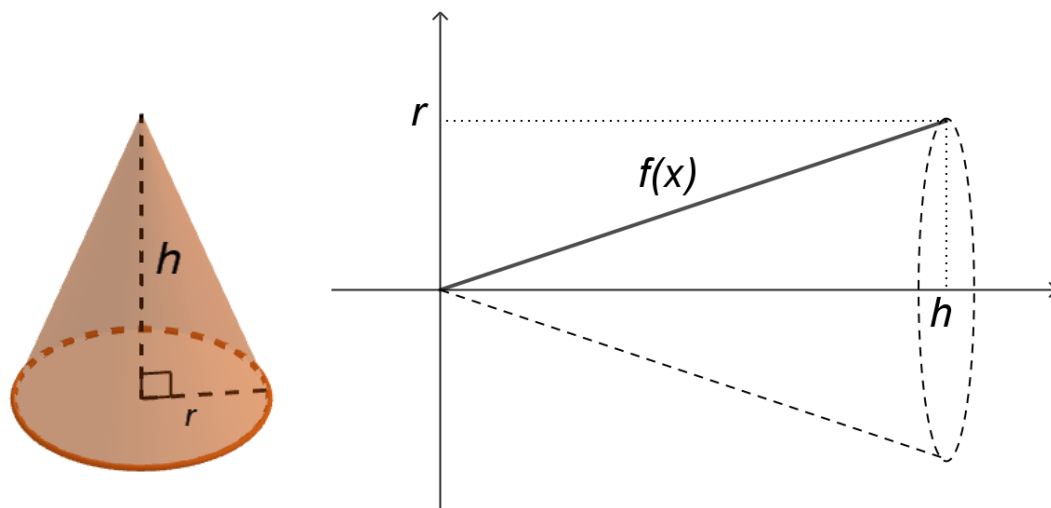
8.4 Overfladearealet af en kegle

Sætning

Overfladearealet af en kegle beregnes som

$$A = \pi r s$$

Bevis



Figur 8.4: Volumen af kegle bestemmes ud fra en ret linje roteret om x-aksen.

Vi bestemmer volumet af en kegle som volumet af et omdrejningslegeme af en ret linje (se figur 8.4, og vi følger således kapitel 6.4.

Vi lægger keglen med top i Origo $(0, 0)$, og siden giver således en ret linje med hældningskoefficient $\frac{r}{h}$. Siden udgør derfor en ret linje beskrevet af funktionen

$$f(x) = \frac{r}{h} \cdot x \quad (8.39)$$

Hældningskoefficienten af funktionen er

$$f'(x) = \frac{r}{h} \quad (8.40)$$

Overfladearealet af omdrejningslegemet er givet ved

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx \quad (8.41)$$

hvilket er bevist i kapitel 6.5. Vi indsætter funktionsudtrykket og den afledte funktion

$$A = \int_0^h 2\pi \frac{r}{h} \cdot x \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} dx \quad (8.42)$$

Eftersom $\sqrt{1 + \left(\frac{r}{h}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{r^2}{h^2}} = \sqrt{\frac{h^2 + r^2}{h^2}} = \sqrt{\frac{s^2}{h^2}} = \frac{s}{h}$ har vi nu

$$A = \int_0^h 2\pi \frac{r}{h} \cdot x \cdot \frac{s}{h} dx \quad (8.43)$$

π , r , s og h er konstanter og kan flyttes uden for integrationen

$$A = 2\pi \frac{r}{h} \cdot \frac{s}{h} \int_0^h x dx \quad (8.44)$$

Bestemmer stamfunktion

$$A = 2\pi \frac{r}{h} \cdot \frac{s}{h} \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^h \quad (8.45)$$

Indsætter grænserne, og eftersom nederste grænse er 0 giver den $0^2 = 0$, så det skriver vi ikke

$$A = 2\pi \frac{r}{h} \cdot \frac{s}{h} \cdot \frac{1}{2} h^2 \quad (8.46)$$

Da h^2 står i både tæller og nævner, går den ud, og vi har

$$A = \pi r s \quad (8.47)$$

Q.E.D

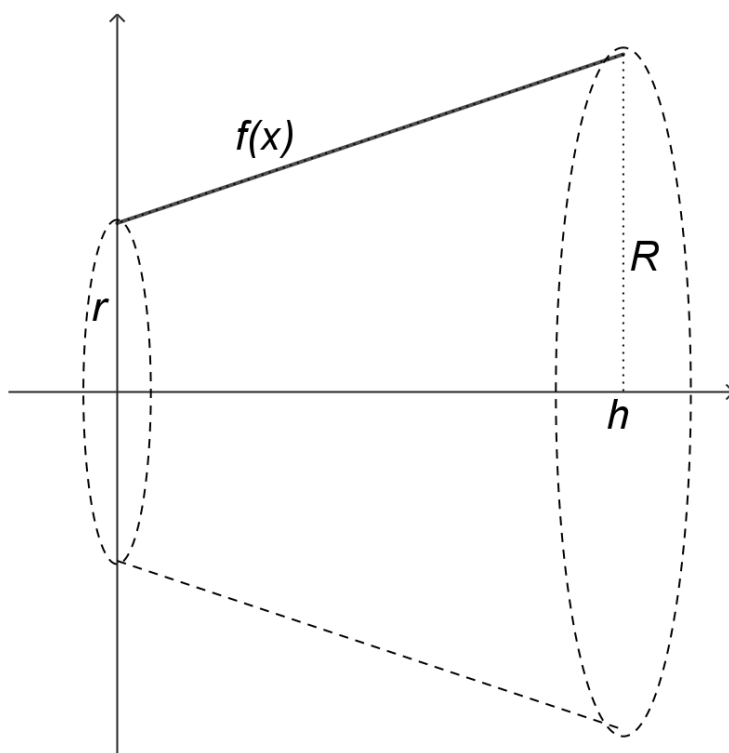
8.5 Volumen af en keglestub

Sætning

Volumet af en keglestub beregnes som

$$V = \frac{1}{3}h \cdot (G + g + \sqrt{G \cdot g})$$

Bevis



Figur 8.5: Volumen af keglestub bestemmes ud fra en ret linje roteret om x-aksen.

Vi bestemmer volumet af en keglestub som volumet af et omdrejningslegeme af en ret linje (se figur 8.5, og vi følger således kapitel 6.4.

Keglestubben har højden h , og mindste radius r , og største radius R . Keglestubben har således den lille grundflade

$$g = \pi r^2 \quad (8.48)$$

og den store grundflade

$$G = \pi R^2 \quad (8.49)$$

Vi lægger keglestubben med den mindste grundflade ved top i Origo ($x = 0$), og siden giver således en ret linje med hældningskoefficient $\frac{R-r}{h}$. Siden udgør derfor en ret linje beskrevet af funktionen

$$f(x) = \frac{R-r}{h} \cdot x + r \quad (8.50)$$

Volumet af omdrejningslegemet er givet ved

$$V = \int_a^b \pi(f(x))^2 dx \quad (8.51)$$

hvilket er bevist i kapitel 6.4. Vi indsætter funktionsudtrykket

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{R-r}{h} \cdot x + r \right)^2 dx \quad (8.52)$$

Benytter første kvadratsætning $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ og får

$$V = \int_0^h \pi \left(\frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot x^2 + 2r \frac{R-r}{h} \cdot x + r^2 \right) dx \quad (8.53)$$

Bestemmer stamfunktion

$$V = \left[\pi \left(\frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + r \frac{R-r}{h} \cdot x^2 + r^2 \cdot x \right) \right]_0^h \quad (8.54)$$

Indsætter grænserne, og eftersom nederste grænse er 0 giver den $0^3 = 0^2 = 0^1 = 0$, så det skriver vi ikke

$$V = \pi \left(\frac{(R-r)^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} (h^3) + r \frac{R-r}{h} \cdot h^2 + r^2 \cdot h \right) \quad (8.55)$$

Da $\frac{h^3}{h^2} = h$ og $\frac{h^2}{h} = h$ fås

$$V = \pi \left(\frac{1}{3} h (R-r)^2 h + r (R-r) h + r^2 h \right) \quad (8.56)$$

Vi sætter h uden for parentes og parenteserne ganges ud

$$V = \pi \left(\frac{1}{3} R^2 + r^2 - 2Rr + Rr - r^2 + r^2 \right) \cdot h \quad (8.57)$$

Hvorved vi får

$$V = \pi \left(\frac{1}{3} (R^2 + r^2 - 2Rr) + Rr \right) \quad (8.58)$$

$\frac{3}{3}$ ganges ind i parentesen og sidste led ganges med $\frac{3}{3}$

$$V = \pi \left(\frac{1}{3} R^2 + \frac{1}{3} r^2 - \frac{2}{3} Rr + \frac{3}{3} Rr \right) \quad (8.59)$$

Og vi har

$$V = \pi \left(\frac{1}{3} R^2 + \frac{1}{3} r^2 + \frac{1}{3} Rr \right) \quad (8.60)$$

$\frac{1}{3}$ sættes nu uden foran parentes og vi har

$$V = \frac{1}{3} \pi (R^2 + r^2 + Rr) \quad (8.61)$$

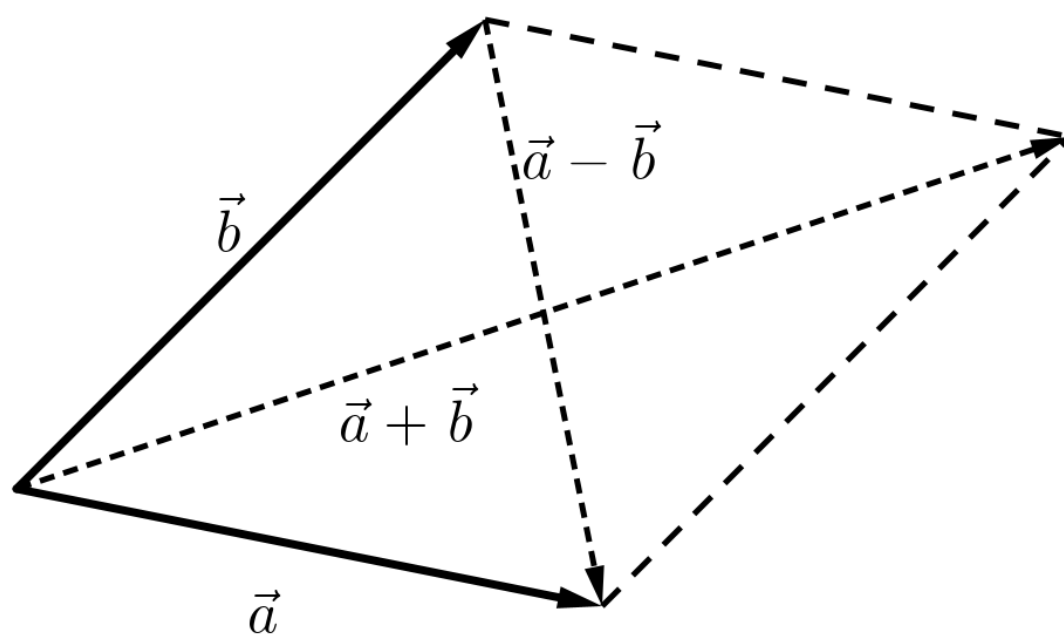
Vi ganger π ind i parentesen og eftersom $\pi \cdot Rr = \pi \cdot \sqrt{R^2 r^2} = \sqrt{\pi^2 R^2 r^2}$ og da $G = \pi R^2$ og $g = \pi r^2$ har vi nu

$$V = \frac{1}{3} h \cdot (G + g + \sqrt{Gg}) \quad (8.62)$$

Q.E.D

Kapitel 9

Vektorer i planen



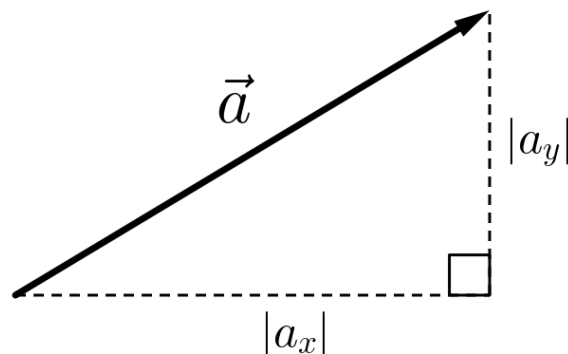
9.1 Længden af en vektor

Sætning

For en vektor givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ beregnes længden som

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Bevis



Figur 9.1: Længden af en vektor er givet ved vektorens koordinater.

Fordi vi har et retvinklet koordinatsystem kan vi ud fra vektorens koordinater konstruere en retvinklet trekant. Hypotenusen svarer til $\vec{a}$ og længden af vektoren er derfor længden af hypotenusen, mens længderne af to kateder er henholdsvis $|a_x|$ og $|a_y|$ ¹. Længden af vektoren $|\vec{a}|$ beregnes ud fra Pythagoras's sætning

$$|\vec{a}| = \sqrt{|a_x|^2 + |a_y|^2} \quad (9.1)$$

Eftersom vi tager koordinaterne i anden potens og $(-x)^2 = |-x|^2 = x^2$ kan vi droppe numerisktegnene på koordinaterne

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (9.2)$$

Q.E.D

¹Numerisktegnene er for de tilfælde, hvor en eller begge koordinater er negative, og vi har brug for trekantens sidelængder

9.2 Skalarproduktet

Sætning

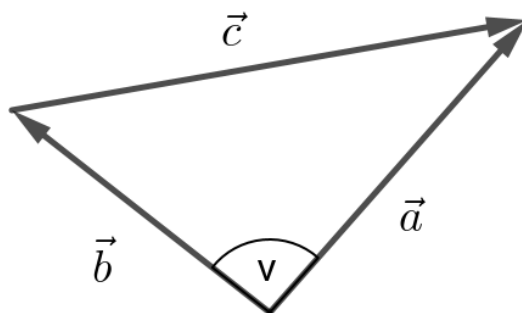
Skalarproduktet mellem to vektore givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ beregnes ud fra koordinaterne som

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y$$

eller ud fra vektorlængder og vinklen v mellem de to vektore som

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)$$

Bevis



Figur 9.2: Vektorene $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med vinklen v imellem sig, danner en trekant med $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$.

Vi danner en trekant med siderne givet ved $\vec{a}$ og $\vec{b}$ samt

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \end{pmatrix} \quad (9.3)$$

Sidelængderne er således givet ved $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ og $|\vec{c}|$, hvor f.eks. $|\vec{a}|$ beregnes som

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (9.4)$$

Vi benytter cosinusrelationen (se evt. kap. 2.3) og får derved

$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(v) \quad (9.5)$$

Vi trækker $|\vec{c}|^2$ fra og lægger $2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(v)$ til på begge sider af lighedstegnet

$$2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(v) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2 \quad (9.6)$$

og ganger igennem med $\frac{1}{2}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(v) = \frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2}{2} \quad (9.7)$$

Højresiden beregnes ud fra 9.4 og tilsvarende for længden af de andre vektore

$$\frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2}{2} = \frac{a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - (a_x - b_x)^2 - (a_y - b_y)^2}{2} \quad (9.8)$$

Vi benytter os af anden kvadratsætning $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$

$$\frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2}{2} = \frac{a_x^2 + a_y^2 + b_x^2 + b_y^2 - a_x^2 - b_x^2 + 2a_x b_x - a_y^2 - b_y^2 + 2a_y b_y}{2} \quad (9.9)$$

$a_x^2, b_x^2, a_y^2, b_y^2$ går ud og vi har

$$\frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{c}|^2}{2} = \frac{2a_x b_x + 2a_y b_y}{2} = a_x b_x + a_y b_y \quad (9.10)$$

Substituerer tilbage i 9.7

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \cos(v) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y \quad (9.11)$$

og højreside og venstreside defineres som to forskellige måder at beregnes skalarproduktet.

Q.E.D

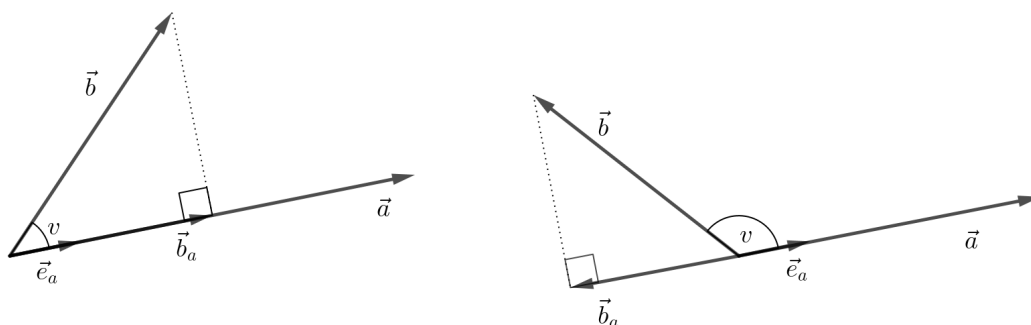
9.3 Vektorprojektion

Sætning

Projektionen af vektor $\vec{b}$ på $\vec{a}$ beregnes som

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a}$$

Bevis



Figur 9.3: Vektorprojektion. $\vec{b}_a$ er $\vec{b}$ projekteret på $\vec{a}$ og $\vec{e}_a$ er en enhedsvektor i $\vec{a}$'s retning. Venstre: spids vinkel, højre: stump vinkel.

Vi definerer en enhedsvektor i $\vec{a}$'s retning som

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (9.12)$$

Spids vinkel

Det ses fra figur 9.3 at for en spids vinkel har vi

$$\vec{b}_a = t \cdot \vec{e}_a \quad (9.13)$$

hvor t er en positiv faktor givet ved

$$t = |\vec{b}_a| \quad (9.14)$$

Vi har en retvinklet trekant med hypotenusen $|\vec{b}|$ og vi kan bestemme cosinus til en vinkel som forholdet mellem hosliggende katede og hypotenusen

$$\cos(v) = \frac{|\vec{b}_a|}{|\vec{b}|} \quad (9.15)$$

det vil sige at $|\vec{b}_a|$ og dermed faktoren t kan skrives som

$$t = |\vec{b}| \cdot \cos(v) \quad (9.16)$$

Vi forlænger $|\vec{a}|$ og får derved

$$t = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)}{|\vec{a}|} \quad (9.17)$$

Tælleren svarer til skalarproduktet mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$ og vi har

$$t = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} \quad (9.18)$$

Vi sætter 9.12, 9.13 og 9.18 sammen og får derved

$$\vec{b}_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \quad (9.19)$$

Stump vinkel

For en stump vinkel har vi

$$\vec{b}_a = -t \cdot \vec{e}_a \quad (9.20)$$

hvor t er en positiv faktor givet ved

$$t = |\vec{b}_a| = \vec{b} \cdot \cos(180^\circ - v) = -\vec{b} \cdot \cos(v) \quad (9.21)$$

og vi har derfor

$$\vec{b}_a = \vec{b} \cdot \cos(v) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(v)}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \cdot \vec{a} \quad (9.22)$$

Q.E.D

9.4 Arealet af to vektorers udspændte parallelogram

Sætning

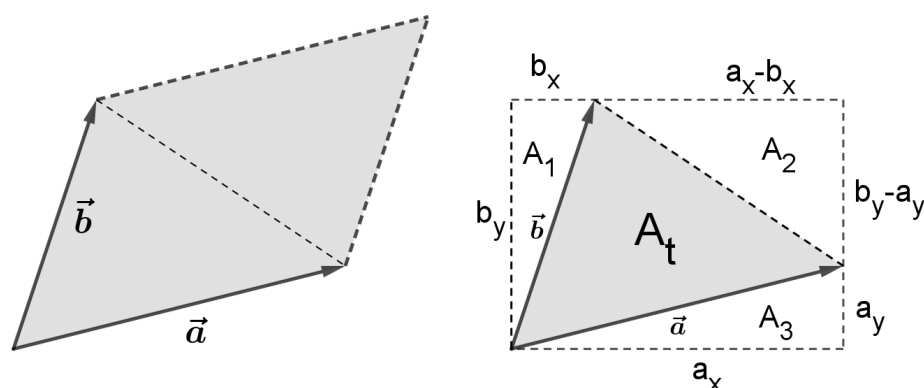
Arealet af det udspændte parallelogram mellem to vektore givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \end{pmatrix}$ beregnes ud fra koordinaterne som

$$A = |a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x|$$

Arealet af den udspændte trekant er

$$A_t = \frac{1}{2} |a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x|$$

Bevis



Figur 9.4: Venstre: Det udspændte parallelogram mellem to vektorer. Højre: Areal af den udspændte trekant.

På figur 9.4(højre) ses de to vektorer, samt et rektangel, der netop omslutter vektorerne. Arealet af rektanglet er

$$A_r = a_x \cdot b_y \quad (9.23)$$

De omkringliggende trekanter har areal

$$A_1 = \frac{1}{2} b_x \cdot b_y \quad (9.24)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} (a_x - b_x) \cdot (b_y - a_y) \quad (9.25)$$

$$A_3 = \frac{1}{2} a_x \cdot a_y \quad (9.26)$$

Arealet af den udspændte trekant er differensen

$$A_t = A_r - A_1 - A_2 - A_3 \quad (9.27)$$

Ved indsættelse af ligning 9.23-9.26 fås

$$A_t = a_x \cdot b_y - \frac{1}{2} b_x \cdot b_y - \frac{1}{2} (a_x - b_x) \cdot (b_y - a_y) - \frac{1}{2} a_x \cdot a_y \quad (9.28)$$

Ganger parenteserne sammen

$$A_t = a_x \cdot b_y - \frac{1}{2} b_x \cdot b_y - \frac{1}{2} a_x \cdot b_y + \frac{1}{2} a_x \cdot a_y + \frac{1}{2} b_x \cdot b_y - \frac{1}{2} b_x \cdot a_y - \frac{1}{2} a_x \cdot a_y \quad (9.29)$$

2. og 5. led på højresiden af ligningen går ud med hinanden, og ligeså går 4. og 7. led ud. Tilbage har vi

$$A_t = a_x \cdot b_y - \frac{1}{2}a_x \cdot b_y - \frac{1}{2}b_x \cdot a_y \quad (9.30)$$

Vi reducere 1. og 2. led og får

$$A_t = \frac{1}{2}a_x \cdot b_y - \frac{1}{2}b_x \cdot a_y \quad (9.31)$$

Sætter $\frac{1}{2}$ uden for parentes

$$A_t = \frac{1}{2}(a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y) \quad (9.32)$$

Det bemærkes, at hvis de to vektorer havde være byttet om, havde vi fået arealet $A = \frac{1}{2}(b_x \cdot a_y - a_x \cdot b_y)$, altså ligesom før blot med modsat fortegn. Eftersom arealet skal have en positiv størrelse, tager vi den numeriske værdi, og får derved arealet af den udspændte trekant til

$$A_t = \frac{1}{2} |a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y| \quad (9.33)$$

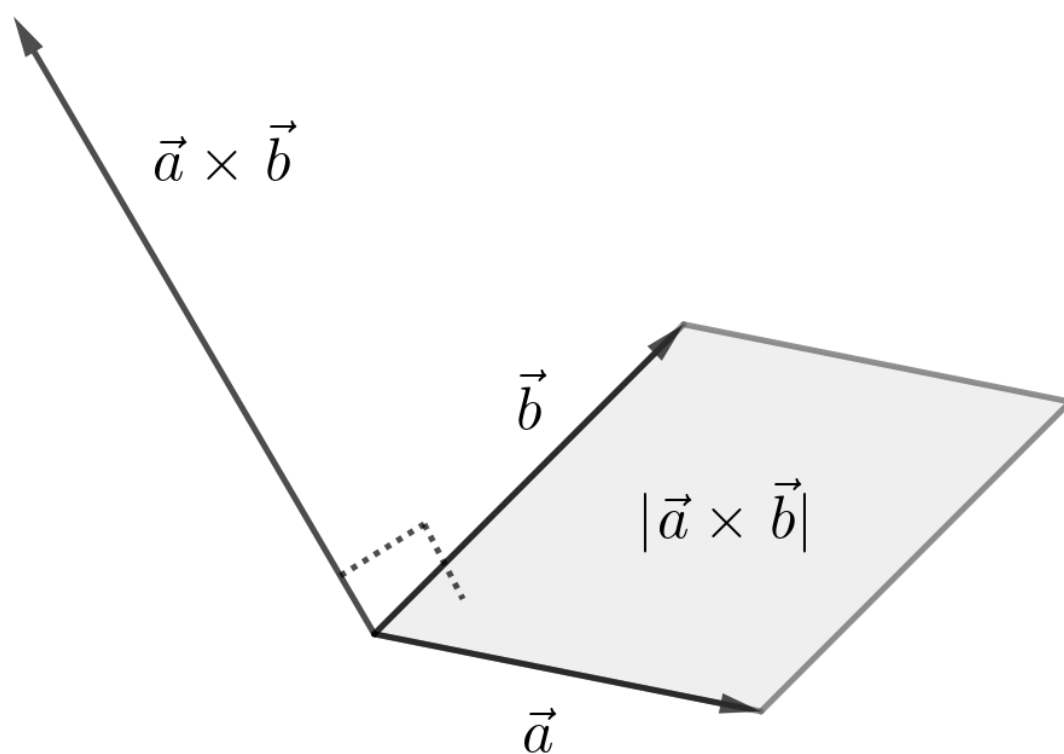
Eftersom det udspændte parallelogram er dobbelt så stort som den udspændte trekant, har vi at arealet af det udspændte parallelogram er

$$A = |a_x \cdot b_y - b_x \cdot a_y| \quad (9.34)$$

Q.E.D

Kapitel 10

Vektorer i rummet



10.1 Linjens parameterfremstilling

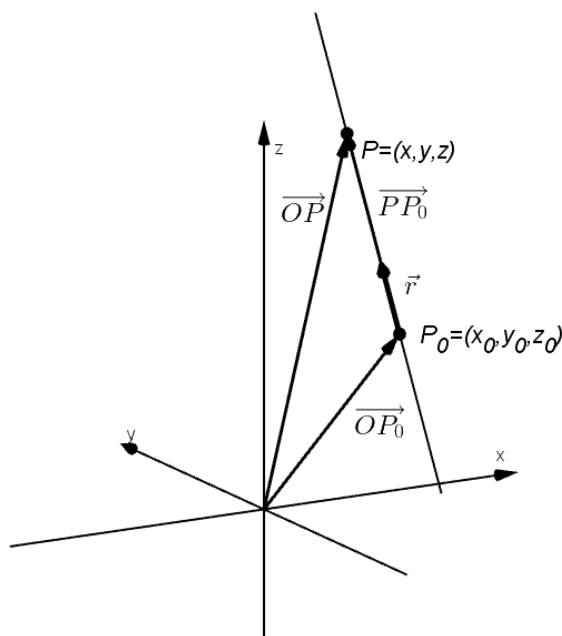
Sætning

En ret linje i rummet, som har en retningsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$, og som går gennem punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, kan beskrives ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$$

hvor t er en parameter, som tilhører alle reelle tal.

Bevis



Figur 10.1: Ret linje i rummet beskrevet ved et kendt punkt og en retningsvektor.

Vi skal beskrive en linje, som går gennem et kendt fast punkt med koordinaterne $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Retningsvektoren $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix}$ er parallel med linjen, og beskriver dermed linjens retning. Ethvert punkt $P = (x, y, z)$ på linjen beskrives ved stedvektoren til P , som også findes som summen af stedvektoren til P_0 plus vektoren fra P_0 til P

$$\vec{OP} = \vec{OP_0} + \vec{P_0P} \quad (10.1)$$

Stedvektoren til P er givet ved koordinaterne til P

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (10.2)$$

og tilsvarende er stedvektoren til P_0

$$\overrightarrow{OP_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (10.3)$$

Vektoren fra P_0 til P går i linjens retning, og må derfor være en faktor gange retningsvektoren

$$\overrightarrow{P_0P} = t \cdot \vec{r} \quad t \in \mathbb{R} \quad (10.4)$$

Ved at indsætte i 10.1 har vi

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \quad (10.5)$$

Q.E.D

10.2 Planens ligning på normalform

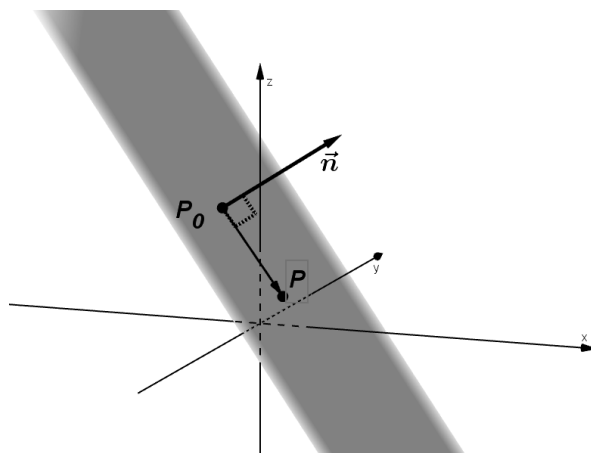
Sætning

En plan i rummet, som har en normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, og som går gennem punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, kan beskrives ved ligningen

$$ax + by + cz + d = 0$$

hvor $d = -(a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0)$.

Bevis



Figur 10.2: En plan i rummet beskrevet ved et kendt punkt og en normalvektor.

Vi skal beskrive en plan, som går gennem et kendt fast punkt med koordinaterne $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Normalvektoren $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ er vinkelret på planen, og beskriver dermed planens retning. For ethvert punkt $P = (x, y, z)$ i planen gælder således at vektoren fra P_0 til P er vinkelret med $\vec{n}$. Det betyder, at vinklen mellem de to vektorer er 90° og skalarproduktet er dermed 0

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{P_0P}| \cdot \cos(90^\circ) = 0 \quad (10.6)$$

Vektoren $\overrightarrow{P_0P}$ har koordinaterne

$$\overrightarrow{P_0P} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (10.7)$$

og vi kan nu skrive skalarproduktet ved hjælp af koordinaterne

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0 \quad (10.8)$$

Ganger ind i parenteserne

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0 \quad (10.9)$$

Flytter rundt på leddene og substituere $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ og får

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = ax + by + cz + d = 0 \quad (10.10)$$

Q.E.D

Kapitel 11

Talfølger og rekursion



11.1 Den harmoniske række

Sætning

Den harmoniske række

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

divergerer, dvs. går mod ∞ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = \infty$$

Bevis

Vi adderer 3. og 4. led, 5.-8. led osv.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \quad (11.1)$$

Eftersom $\frac{1}{3} > \frac{1}{4}$ har vi

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (11.2)$$

Tilsvarende, eftersom $\frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \frac{1}{7} > \frac{1}{8}$ har vi

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad (11.3)$$

Derfor er

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \quad (11.4)$$

Dette må nødvendigvis gå mod ∞ , og den harmoniske række går derfor mod ∞ .

Q.E.D

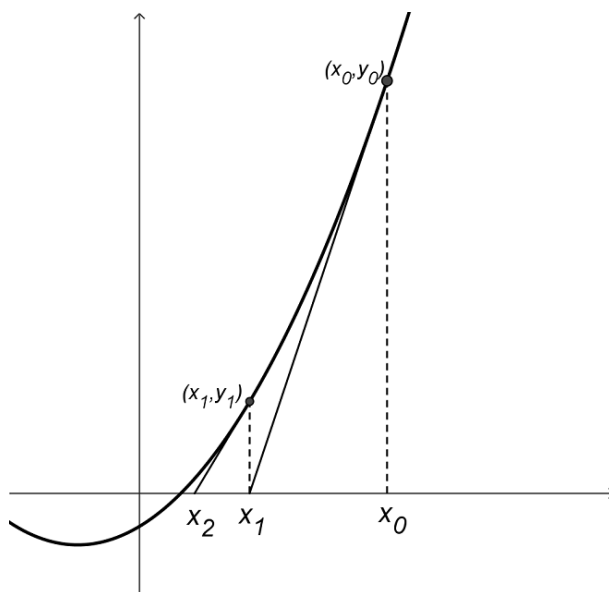
11.2 Newtons metode

Sætning

For en differentiabel funktion $f(x)$ er Newtons metode en iterativ proces til bestemmelse af funktionens nulpunkter, dvs. at bestemme x^* for hvilket $f(x^*) = 0$. Lad x_0 være initialværdi, Newtons metode til bestemmelse af nulpunkter defineres da af talfølgen x_n , hvor $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ og hvor

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (11.5)$$

Bevis



Figur 11.1: Newtons metode til bestemmelse af en funktions nulpunkt, dvs. grafens skæring med x -aksen.

Vi ønsker at bestemme nulpunktet for en differentiabel funktion $f(x)$. Med initialværdi x_0 kan vi bestemme ligningen for tangenten til $f(x)$ for $x = x_0$

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad (11.6)$$

Vi finder nu nulpunktet for tangenten, dvs. tangentens skæring med x -aksen, og kalder denne værdi for x_1

$$f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0) = 0 \quad (11.7)$$

Trækker $f(x_0)$ fra på begge sider

$$f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) = -f(x_0) \quad (11.8)$$

Dividerer med $f'(x_0)$ på begge sider

$$x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (11.9)$$

Adderer x_0 på begge sider og derved en ligning for x_1 , som er næste værdi i talfølgen

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (11.10)$$

På samme måde kan vi ud fra tangenten for $x = x_1$ bestemme et korrigeret nulpunkt x_2 som

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (11.11)$$

og så fremdeles. Vi kan altså skrive det som en rekursion hvor

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (11.12)$$

hvor $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, og der fortsættes indtil værdien er konvergeret mod det ønskede resultat med tilstrækkelig præcision mht. antal betydende cifre.

Q.E.D

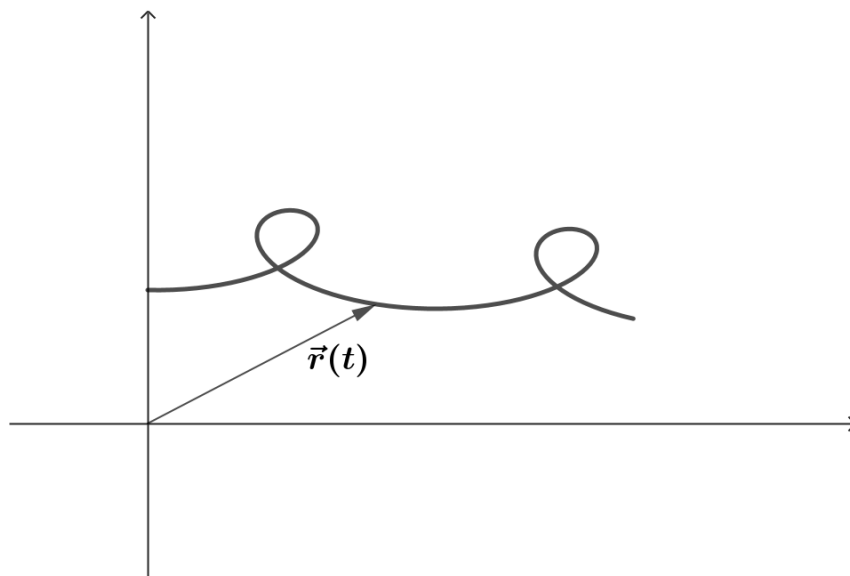
Kommentar

Det skal her kommenteres at hvis der er flere nulpunkter, og dermed et eller flere lokale ekstremumpunkter og et eller flere monotoni-intervaller, vil Newtons metode kun give den ene løsning. Dette vil afhænge af initialværdien, som bør vælges med omhu.

Hvis man har en x-værdi, som er et ekstremumpunkt, vil man have $f'(x_n) = 0$, og så vil metoden helt fejle, da man så vil dividere med nul.

Kapitel 12

Vektorfunktioner



12.1 Længden af en baneurve

Sætning

Længden af en baneurve for en vektorfunktion $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ i intervallet $[t_1; t_2]$ findes som

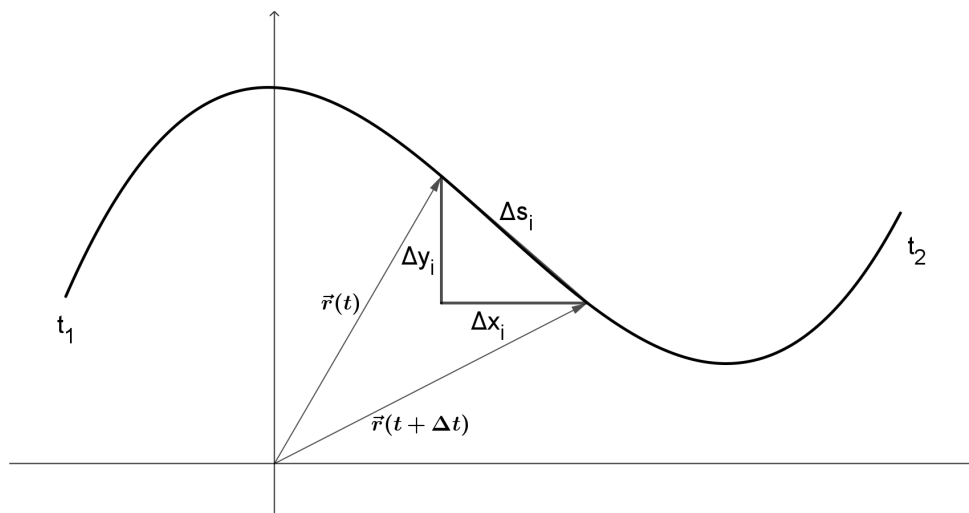
$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Bevis

Dette bevis minder om beviset for kurvelængden af en funktion, se kapitel 6.3.

Vi skal bestemme længde af grafens bane for $\vec{r}(x)$ fra $t = t_1$ til $t = t_2$. Vi gør dette ved at inddele intervallet af t i et antal små intervaller Δt , hvis antal være

$$n = \frac{t_2 - t_1}{\Delta t} \quad (12.1)$$



Figur 12.1:

Det i 'te interval er skitseret i figur 12.1. Stedvektorens koordinater ændres med Δx og Δy og en tilnærmet værdi for længden af kurvestykket bestemmes ved hjælp af Pythagoras sætning som

$$\Delta s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \quad (12.2)$$

Vi forlænger højresiden med Δt og får dermed

$$\Delta s_i = \frac{\sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}}{\Delta t} \Delta t \quad (12.3)$$

Ved benyttelse af regneregler for kvadratrodd $\frac{\sqrt{a}}{b} = \sqrt{\frac{a}{b^2}}$ fås

$$\Delta s_i = \sqrt{\frac{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}{\Delta t^2}} \Delta t \quad (12.4)$$

Fra brøkregning har vi $\frac{a+c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b}$ samt for potensregning $\frac{a^2}{b^2} = (\frac{a}{b})^2$ og vi får nu

$$\Delta s_i = \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2} \Delta t \quad (12.5)$$

Den samlede kurvelængde er tilnærmelsesvis summen af alle kurvestykker

$$L \approx \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2} \Delta t \quad (12.6)$$

Når vi tager grænseværdien $\Delta t \rightarrow 0$ svarer det til $n \rightarrow \infty$, og summen af de små rettelinede kurvestykker vil nærme sig længden af grafen

$$L = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2} \Delta t \quad (12.7)$$

Fra differentialregningen har vi at

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = x'(t) \quad (12.8)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = y'(t) \quad (12.9)$$

og når der tages grænseværdien skrives summen som det bestemte integral, og har vi nu

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt \quad (12.10)$$

Q.E.D

12.2 Vektorfunktionens overstrøgne areal

Sætning

Det overstrøgne areal af en banekurve for en vektorfunktion $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ i intervallet $[t_1; t_2]$ findes som

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} |x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t)| dt$$

Bemærkninger

Vi kan skrive sætningen på forskellig måde. Som en determinant

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} |\det(\vec{r}(t), \vec{r}'(t))| dt \quad (12.11)$$

eller om skalarprodukt

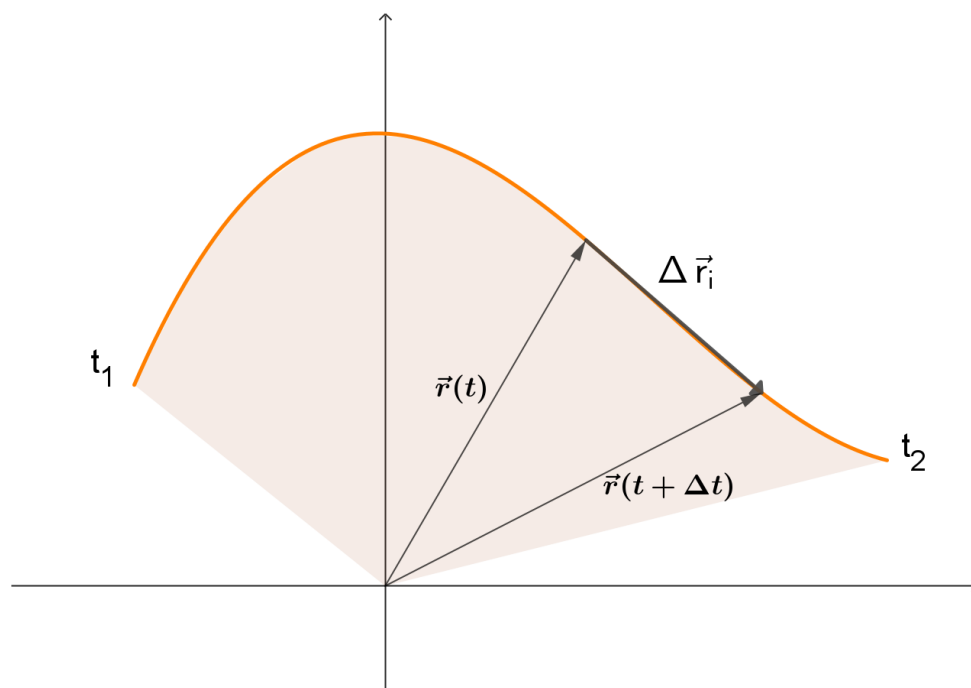
$$L = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} |(\vec{r}(t) \cdot \hat{r}'(t))| dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} |(\hat{r}(t) \cdot \vec{r}'(t))| dt \quad (12.12)$$

Bevis

Dette bevis bygger på beviset for to vektorers udspændte parallelogram, se kapitel 9.4.

Vi skal bestemme arealet udspændt af grafens bane for $\vec{r}(x)$ fra $t = t_1$ til $t = t_2$. Vi gør dette ved at inddele intervallet af t i et antal små intervaller Δt , hvis antal være

$$n = \frac{t_2 - t_1}{\Delta t} \quad (12.13)$$



Figur 12.2:

Det i 'te interval er skitseret i figur 12.2. Stedvektorens koordinater ændres med $\Delta \vec{r}(t)$.

Fra kapitel 9.4 har vi, at i 'te areal kan beregnes som arealet af den udspændte trekant mellem $\vec{r}$ og $\Delta \vec{r}$. Egentlig skal vi benytte $-\vec{r}$ og $\Delta \vec{r}$, men eftersom vi tager absolutværdien, svarer det til arealet af $\vec{r}$ og $\Delta \vec{r}$.

Vi omskriver $\Delta \vec{r}$ ved at forlænge med Δt

$$\Delta \vec{r} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \Delta t \quad (12.14)$$

Når vi om lidt tager grænseværdien $\Delta t \rightarrow 0$ får vi

$$\Delta \vec{r} = \vec{v} \cdot \Delta t = \vec{r}'(t) \cdot \Delta t \quad (12.15)$$

Vi kan nu beregne det i 'te areal som den udspændte trekant mellem

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad (12.16)$$

og

$$\vec{r}'(t) \cdot \Delta t = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \cdot \Delta t \quad (12.17)$$

Ved at benytte sætningen for den udspændte trekant kan vi beregne det i 'te areal som

$$A_i = \frac{1}{2} |x_i \cdot y'_i - y_i \cdot x'_i| \Delta t \quad (12.18)$$

Den samlede areal er tilnærmelsesvis summen af alle del-arealer

$$A \approx \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |x_i \cdot y'_i - y_i \cdot x'_i| \Delta t \quad (12.19)$$

Når vi tager grænseværdien $\Delta t \rightarrow 0$ svarer det til $n \rightarrow \infty$, og summen af de små trekantede arealer vil nærme sig det overstrøgne areal

$$A = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} |x_i \cdot y'_i - y_i \cdot x'_i| \Delta t \quad (12.20)$$

Når der tages grænseværdien skrives summen som det bestemte integral, og har vi nu

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} |x(t) \cdot y'(t) - y(t) \cdot x'(t)| dt \quad (12.21)$$

Q.E.D