

# Op- og afladning af en kondensator

Nicolai Kliem

12. november 2025

## 1 Indledning

Formålet med denne note er at udlede differentiaalligningerne for op- og afladning af en kondensator og vise, at en given funktion er en løsning. Desuden skal der ses på halveringstid ved afladning.

En af arbejdsmetoderne i fysik er udledning af ligninger på baggrund af kendt teori. Det kan betragtes som grundlag for en faglig diskussion og vil derfor kunne være noget, som bl.a. kan inddrages ved en mundtlig eksamen.

## 2 Ligninger

Spændingsforskellen  $U$  over en kondensator med kapacitans  $C$  ved afladning gennem en modstand  $R$  er givet ved

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

hvor  $U_0$  er begyndelsesværdien for spændingsfaldet, og  $t$  er tiden.

Halveringstiden  $T_{1/2}$  ved afladning er givet ved

$$T_{1/2} = R \cdot C \cdot \ln(2)$$

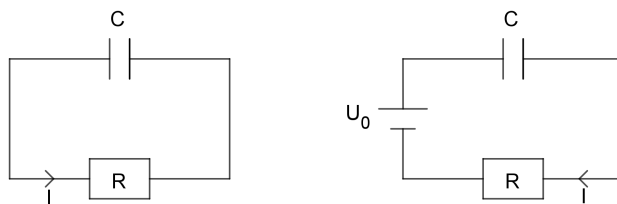
Spændingsforskellen  $U$  over en kondensator med kapacitans  $C$  ved opladning af en spændingskilde med spændingsfald  $U_0$  gennem en modstand  $R$  er givet ved

$$U(t) = U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

## 3 Fysikken bag op- og afladning af en kondensator

Vi skal se på, hvordan spændingsforskellen over en kondensator kan skrives op som differential-ligninger for hhv. afladning og opladning. Vi vil bruge følgende notation

|       |                                                              |
|-------|--------------------------------------------------------------|
| $U$   | Spændingsfald over kondensatoren                             |
| $U_R$ | Spændingsfald over modstanden                                |
| $U_0$ | Spændingsfald over spændingskilde ved opladning              |
| $U_0$ | Begyndelsesværdi for spænding over kondensator ved afladning |
| $C$   | Kapacitans                                                   |
| $R$   | Resistans                                                    |
| $I$   | Strømstyrke                                                  |
| $Q$   | Ladning                                                      |
| $t$   | Tid                                                          |



Figur 1: (a) Kredsløb for afladning. (b) Kredsløb for opladning.

Vi har et kredsløb med en kondensator med kapacitans  $C$  og en modstand med resistans  $R$ . Kondensatoren aflades ved, at der løber en strøm med strømstyrke  $I$  gennem modstanden. Hvis vi tilføjer en spændingskilde med konstant spænding  $U_0$  vil kondensatoren oplades.

Fra fysikundervisningen ved vi, at summen af alle spændingsfald over komponenterne i kredsløbet er lig med spændingsfaldet over spændingskilden. For afladning uden spændingskilde har vi

$$U + U_R = 0 \quad (1)$$

For opladning

$$U + U_R = U_0 \quad (2)$$

Spændingsforskellen  $U_R$  over modstanden er givet ved Ohm's lov

$$U_R = R \cdot I \quad (3)$$

Eftersom alle komponenter i kredsløbet sidder i serieforbindelse er strømstyrken den samme overalt og er givet som

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad (4)$$

hvor  $Q$  er kondensatorens ladning og  $\frac{dQ}{dt}$  dermed er den ladning, der løber gennem kredsløbet i det infinitimale tidsrum  $dt$ .

Endelig har vi, at en kondensators ladning er proportionel med spændingsfaldet over den

$$Q = C \cdot U \quad (5)$$

## 4 Afladning af en kondensator

### 4.1 Differentialligning

Vi skal nu se på, hvordan vi ud fra (1), (3), (4) og (5) kan vise, at ændringen af spændingen over kondensatoren kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{RC}U \quad (6)$$

Vi benytter ligningerne (1)-(5) i den rækkefølge, som de står ovenfor. Vores udgangspunkt er (1)  $U + U_R = 0$  og vi isolerer spændingen over kondensatoren  $U$

$$U = -U_R$$

Ved hjælp af Ohms lov for modstanden (3)  $U_R = R \cdot I$  substitueres  $U_R$ .

$$U = -R \cdot I$$

Strømstyrken er givet ved (4)  $I = \frac{dQ}{dt}$  og vi har således

$$U = -R \cdot \frac{dQ}{dt}$$

Ud fra (5)  $Q = C \cdot U$  har vi nu

$$U = -R \cdot \frac{d(C \cdot U)}{dt}$$

Idet  $C$  er konstant har vi derfor

$$U = -R \cdot C \cdot \frac{dU}{dt}$$

og efter division med  $-R \cdot C$  og ombytning af venstre og højre side fås

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{RC}U$$

Vi har nu udledt en differentialligning for spændingen over en kondensator ved afladning. Venstresiden er den matematiske formulering af ændringen af spænding med tiden, og højre side viser at ændringen er proportional med spændingen  $U$  med en proportionalitetskonstant givet ved  $-\frac{1}{RC}$ .

## 4.2 Løsning

Vi skal nu vise, at løsningen til (6) er

$$U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (7)$$

Venstresiden af (6) fås ved at differentiere (7). Det er en sammensat funktion, så vi skal bruge kædereolen og får derved

$$\frac{dU}{dt} = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) = -\frac{1}{RC} U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Højresiden af (6) ved at substituere  $U$  fra (7) ind i (6).

$$-\frac{1}{RC}U = -\frac{1}{RC}U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Det ses umiddelbart at venstreside og højreside er lig med hinanden, hvorved vi har vist at (7) er en løsning til (6).

## 5 Halveringstid

Når vi har en eksponentielfunktion, ved vi, at der er et tidsrum, som vi kalder halveringstiden og skal forstås sådan, at efter tiden  $T_{1/2}$  vil spændingen være halveret. Vi skal vise at halveringstiden  $T_{1/2}$  er givet ved  $R$  og  $C$  som

$$T_{1/2} = R \cdot C \cdot \ln(2) \quad (8)$$

Vi udnytter, at efter tiden  $T_{1/2}$  vil spændingen være halveret. Dette gælder uanset hvilket tidspunkt vi starter ved. Så vi kigger på spændingen til et tidspunkt  $t_0$ , samt efter et stykke tid svarende til halveringstiden dvs. til tiden  $t_0 + T_{1/2}$ . Eftersom spændingen er halveret har vi

$$U(t_0 + T_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot U(t_0)$$

Vi benytter nu funktionsforskriften  $U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$  og får derved

$$U_0 e^{-\frac{t_0+T_{1/2}}{RC}} = \frac{1}{2} \cdot U_0 e^{-\frac{t_0}{RC}}$$

Ved hjælp af potensregneregler, kan vi se at

$$e^{-\frac{t_0+T_{1/2}}{RC}} = e^{-\frac{t_0}{RC}} \cdot e^{-\frac{T_{1/2}}{RC}}$$

og vi har nu

$$U_0 \cdot e^{-\frac{t_0}{RC}} \cdot e^{-\frac{T_{1/2}}{RC}} = \frac{1}{2} \cdot U_0 \cdot e^{-\frac{t_0}{RC}}$$

Vi forkorter med  $U_0 \cdot e^{-\frac{t_0}{RC}}$  og får

$$e^{-\frac{T_{1/2}}{RC}} = \frac{1}{2}$$

Vi tager nu logaritmefunktionen på begge sider og udnytter at eksponential- og logaritmefunktionen er hinandens omvendte funktioner, så vi får

$$-\frac{T_{1/2}}{RC} = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Vi ganger igennem med  $-RC$  og benytter, at  $\ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$  og får

$$T_{1/2} = R \cdot C \cdot \ln(2)$$

og dermed har vi vist (8).

## 5.1 Eksempel på halveringstid

Hvis man laver det som fysikøvelse, kunne man f.eks. benytte følgende værdier.

$$C = 4700\mu\text{F} = 4,7 \cdot 10^{-3}\text{F}$$

$$R = 2,2\text{k}\Omega = 2,2 \cdot 10^3\Omega$$

I dette tilfælde vil man få en halveringstid på

$$T_{1/2} = 2,2 \cdot 10^3\Omega \cdot 4,7 \cdot 10^{-3}\text{F} \cdot \ln(2) = 6,7\text{s}$$

Hvis modstanden øges, vil der løbe en mindre strøm, og afladningen vil tage længere tid. Hvis kapacitansen øges, vil der være en større ladning i kondensatoren, og afladningen vil tage længere tid, og modsat ved lavere værdier.

## 6 Opladning af en kondensator

### 6.1 Differentialligning

På tilsvarende måde som ovenfor, skal vi nu ud fra (2), (3), (4) og (5) vise, at ændringen af spændingen over kondensatoren ved opladning kan beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{RC}U + \frac{U_0}{RC} \quad (9)$$

Vores udgangspunkt er (2)  $U + U_R = U_0$  og vi isolerer spændingen over kondensatoren  $U$

$$U = U_0 - U_R$$

Ved hjælp af Ohms lov for modstanden (3)  $U_R = R \cdot I$  substitueres  $U_R$ .

$$U = U_0 - R \cdot I$$

Strømstyrken er givet ved (4)  $I = \frac{dQ}{dt}$  og vi har således

$$U = U_0 - R \cdot \frac{dQ}{dt}$$

Ud fra (5)  $Q = C \cdot U$  har vi nu

$$U = U_0 - R \cdot \frac{d(C \cdot U)}{dt}$$

Idet  $C$  er konstant har vi derfor

$$U = U_0 - R \cdot C \cdot \frac{dU}{dt}$$

og efter division med  $-R \cdot C$  og ombytning af venstre og højre side fås

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{1}{RC}U + \frac{U_0}{RC}$$

Vi har nu udledt en differentialligning for spændingen over en kondensator ved afladning.

Venstresiden er den matematiske formulering af ændringen af spænding med tiden. Første led på højre side viser at ændringen er lineær afhængig med spændingen  $U$  med en konstant givet ved  $-\frac{1}{RC}$ , mens andet led er konstant og betyder, at når spændingen går mod  $U_0$  vil hele højresiden gå mod nul, og ændringen vil derfor gå mod nul hvilket betyder, at spændingen aldrig bliver større end  $U_0$ .

## 6.2 Løsning

Vi viser nu ved indsættelse, at løsningen til (9) er

$$U(t) = U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (10)$$

Venstresiden af (9) fås ved at differentiere (10). Det er en sammensat funktion, så vi skal bruge kædereolen og får (7).

$$\frac{dU}{dt} = -U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \cdot \left(-\frac{1}{RC}\right) = \frac{1}{RC} U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Højresiden af (6) fås ved at substituere  $U$  fra (10) ind i (9).

$$-\frac{1}{RC}U + \frac{U_0}{RC} = -\frac{1}{RC} \left( U_0 - U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \right) + \frac{U_0}{RC} = -\frac{U_0}{RC} + \frac{1}{RC} U_0 e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{U_0}{RC} = \frac{1}{RC} U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Det ses at venstreside og højreside er lig med hinanden, hvorved vi har vist at (10) er en løsning til (9).